Математическая логика и логическое программирование

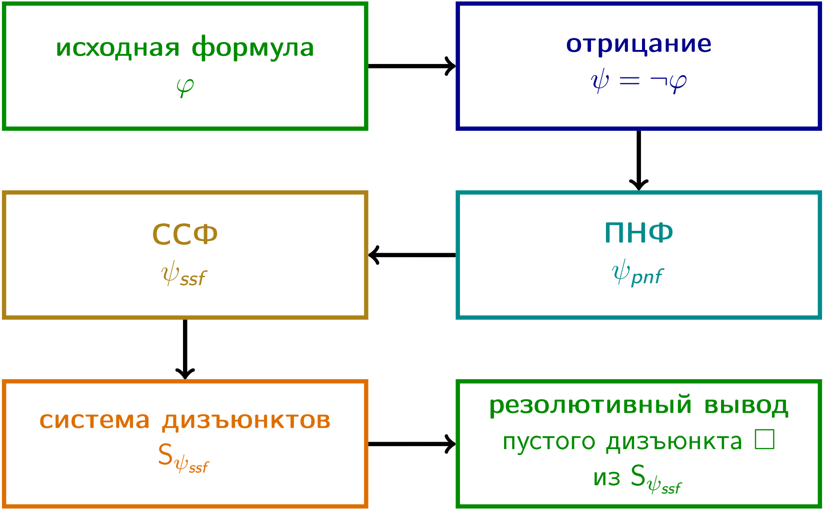
mk.cs.msu.ru $\rightarrow$ Лекционные курсы
$\rightarrow$ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 20

Композиция подстановок
Постановка задачи унификации

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

исходная формула

φ

отрицание

$\psi = \neg\varphi$

ПНФ

ψ_{pnf}

ССФ

ψ_{ssf}

система дизъюнктов

$S_{\psi_{ssf}}$

резолютивный вывод

пустого дизъюнкта $\square$

из $S_{\psi_{ssf}}$

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

Противоречия в системах дизъюнктов

На последних этапах метода резолюций
требуется проверить выполнимость системы дизъюнктов

Попробуем, по аналогии с методом семантических таблиц,
придумать способ извлечения явных противоречий из скрытых (неявных)

В качестве явного противоречия
будем использовать пустой дизъюнкт ($\square$)

Начнём издалека: приведём несколько примеров того,
как можно было бы «разумно» и «просто» извлечь $\square$
из невыполнимой системы дизъюнктов

Противоречия в системах дизъюнктов

$\not\models \{P(x),\ \neg P(x)\}$:

явное противоречие

$$\begin{tikzcd}
P(x) \arrow[dr] & & \neg P(x) \arrow[dl] \\
& \square &
\end{tikzcd}$$

$\not\models \{\neg P(x),\ \neg Q(y),\ P(x) \vee Q(y)\}$:

$$\begin{tikzcd}
\neg P(x) \arrow[dr] & P(x) \vee Q(y) \arrow[d] & \neg Q(y) \arrow[ddl] \\
& Q(y) \arrow[d] & \\
& \square &
\end{tikzcd}$$

явное противоречие

$$\forall x\, \neg P(x),\ \forall x\, \forall y\, (P(x) \vee Q(y)) \models \forall y\, Q(y)$$

Противоречия в системах дизъюнктов

$\not\models \{P(f(x), y),\ \neg P(u, g(v))\}$

не очень явное противоречие

$$\begin{tikzcd}
P(f(x), y) \arrow[d, dotted] \arrow[drr] & & & & \neg P(u, g(v)) \arrow[d, dotted] \arrow[dll] \\
P(f(x), g(v)) \arrow[rr, dotted] & & \square & & \neg P(f(x), g(v)) \arrow[ll, dotted]
\end{tikzcd}$$

$$\forall x\, \forall y\; P(f(x), y) \models \forall x\, \forall v\; P(f(x), g(v))$$

$$\forall u\, \forall v\; \neg P(u, g(v)) \models \forall x\, \forall v\; \neg P(f(x), g(v))$$

Чтобы обнаружить не очень явное противоречие в системе дизъюнктов, потребовалось привести атомы дизъюнктов **к общему виду**

Приведение выражений к общему виду называется унификацией,
и перед описанием последнего этапа метода резолюций
(**резолютивного вывода** $\square$) необходимо
строго сформулировать и научиться решать эту задачу

Композиция подстановок

Унификация атомов A, B достигается применением к ним подстановки θ, такой что $A\theta = B\theta$

Напоминание

Подстановка — это отображение θ : Var $\to$ Term

Конечная подстановка задаётся множеством связок:

$$\{\mathtt{x}_1/t_1,\ \ldots,\ \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$$

$E\theta$ — это результат применения подстановки θ к выражению E

Чтобы поставить и решить задачу унификации, исследуем основные алгебраические свойства подстановок

Композиция подстановок

Композиция подстановок θ и η — это подстановка $\theta\eta$, такая что для любой переменной $\mathtt{x}$ верно равенство

$$\mathtt{x}(\theta\eta) = (\mathtt{x}\theta)\eta$$

Утверждение

Пусть $\theta = \{\mathtt{x_1}/t_1, \dots, \mathtt{x_n}/t_n\}$ **и** $\eta = \{\mathtt{y_1}/s_1, \dots, \mathtt{y_k}/s_k\}$. **Тогда**

$$\theta\eta = \{\mathtt{x_i}/t_i\eta \mid 1 \le i \le n,\ x_i \ne t_i\eta\}$$
$$\cup\{\mathtt{y_j}/s_j \mid 1 \le j \le k,\ \mathtt{y_j} \notin \{\mathtt{x_1}, \dots, \mathtt{x_n}\}\}$$

Доказательство

Рассмотрим переменную $\mathsf{z} \in \mathsf{Var}$

Если $\mathsf{z} \notin \mathsf{Dom}_\theta \cup \mathsf{Dom}_\eta$, то $\mathsf{z}(\theta\eta) = (\mathsf{z}\theta)\eta = \mathsf{z}\eta = \mathsf{z}$

Если $\mathsf{z} = \mathtt{y_j} \in \mathsf{Dom}_\eta \setminus \mathsf{Dom}_\theta$, то $\mathsf{z}(\theta\eta) = (\mathsf{z}\theta)\eta = \mathsf{z}\eta = s_j$

Иначе $\mathsf{z} = \mathtt{x_i} \in \mathsf{Dom}_\theta$, и $\mathsf{z}(\theta\eta) = (\mathsf{z}\theta)\eta = t_i\eta$ ▼

Композиция подстановок

Пример

$\theta = \{\mathtt{x}/\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{c}),\ \mathtt{y}/\mathtt{g}(\mathtt{u}),\ \mathtt{z}/\mathtt{y}\}$

$\eta = \{\mathtt{x}/\mathtt{g}(\mathtt{y}), \mathtt{y}/\mathtt{z}, \mathtt{u}/\mathtt{c}\}$

$\theta\eta = ?$

$$\{\mathtt{x}/\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{c})\eta,\ \mathtt{y}/\mathtt{g}(\mathtt{u})\eta,\ \mathtt{z}/\mathtt{y}\eta\} \cup \{\mathtt{u}/\mathtt{c}\}$$

$$\{\mathtt{x}/\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{y}),\mathtt{c}),\ \mathtt{y}/\mathtt{g}(\mathtt{c}),\ \mathtt{z}/\mathtt{z}\} \cup \{\mathtt{u}/\mathtt{c}\}$$

$$\{\mathtt{x}/\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{y}),\mathtt{c}),\ \mathtt{y}/\mathtt{g}(\mathtt{c})\} \cup \{\mathtt{u}/\mathtt{c}\}$$

$$\theta\eta = \{\mathtt{x}/\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{y}),\mathtt{c}),\ \mathtt{y}/\mathtt{g}(\mathtt{c}),\ \mathtt{u}/\mathtt{c}\}$$

Задача унификации

Подстановка θ называется унификатором выражений E_1, E_2, если $E_1\theta = E_2\theta$

$У(E_1, E_2)$ — множество всех унификаторов выражений E_1, E_2

Выражения E_1, E_2 унифицируемы, если $У(E_1, E_2) \neq \emptyset$

Утверждение

Для любых подстановок θ, η и любых выражений E_1, E_2 верно:

$$\text{если } \theta \in У(E_1, E_2), \text{ то } \theta\eta \in У(E_1, E_2)$$

Доказательство

$\theta \in У(E_1, E_2) \quad \Leftrightarrow \quad E_1\theta = E_2\theta \quad \Rightarrow \quad E_1\theta\eta = E_2\theta\eta \quad \Leftrightarrow \quad \theta\eta \in У(E_1, E_2)$ ▼

Подмножество S множества подстановок Θ называется полным в Θ, если любая подстановка θ из Θ представима в виде $\theta = \eta\mu$, где $\eta \in S$

Подстановка θ называется наиболее общим унификатором выражений E_1, E_2, если множество $\{\theta\}$ является полным в $У(E_1, E_2)$

$НОУ(E_1, E_2)$ — множество всех наиболее общих унификаторов выражений E_1, E_2

Задача унификации

Пример

Рассмотрим два атома:

$$A = \mathrm{P}(\mathtt{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) \qquad B = \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathrm{g}(\mathrm{v}))$$

Подстановка $\eta = \{\mathrm{y}/\mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathrm{v})), \mathrm{u}/\mathtt{f}(\mathrm{c}), \mathrm{v}/\mathrm{g}(\mathrm{v}), \mathrm{x}/\mathrm{c}\}$ — унификатор атомов A и B (то есть $\eta \in У(A, B)$), т.к.

$$\mathrm{P}(\mathtt{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y})\eta = \mathrm{P}(\mathtt{f}(\mathrm{c}), \mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathrm{v}))) = \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathrm{g}(\mathrm{v}))\eta$$

А подстановка $\theta = \{\mathrm{y}/\mathrm{g}(\mathrm{v}), \mathrm{u}/\mathtt{f}(\mathrm{x})\}$ — *более общий* унификатор A и B:

$$\mathrm{P}(\mathtt{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y})\theta = \mathrm{P}(\mathtt{f}(\mathrm{x}), \mathrm{g}(\mathrm{v})) = \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathrm{g}(\mathrm{v}))\theta$$

$$\eta = \theta\{\mathrm{v}/\mathrm{g}(\mathrm{v}), \mathrm{x}/\mathrm{c}\}$$

На самом деле θ — **наиболее общий унификатор** атомов A и B

(но как это доказать?)

А выражения $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathtt{f}(\mathrm{x}))$ и $\mathrm{P}(\mathrm{g}(\mathrm{y}), \mathrm{y})$ **неунифицируемы**

(а это как доказать?)

Задача унификации

формулируется следующим образом:

для заданных выражений E_1, E_2

выяснить, унифицируемы ли эти выражения,

и если это так, то вычислить

множество унификаторов, полное в $У(E_1, E_2)$