

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 26

Даша, Саша, Паша, пиво
и метод семантических таблиц
с методом резолюций

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Вступление

В блоке 6 была в качестве иллюстрации предложена такая задача

Дано:

- ▶ Даша любит Сашу,

$$\varphi_1 = L(\mathbf{Д}, \mathbf{С})$$

- ▶ а Саша любит пиво,

$$\varphi_2 = L(\mathbf{С}, \mathbf{пв})$$

- ▶ а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

$$\varphi_3 = L(\mathbf{П}, \mathbf{пв})$$

$$\psi_1 = \forall x (\exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(x, y)) \rightarrow L(\mathbf{П}, x))$$

Выяснить, любит ли кто-нибудь Дашу

$$\chi = \exists x L(x, \mathbf{Д})$$

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi?$$

Или, по теореме о логическом следствии:

$$\models \varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 \& \psi_1 \rightarrow \chi?$$

Попробуем решить эту задачу методом семантических таблиц и методом резолюций

Решение методом семантических таблиц

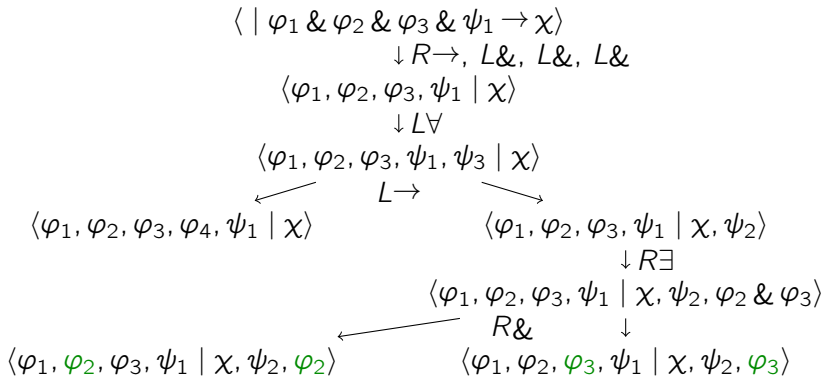
$$\varphi_1 = L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) \quad \psi_1 = \forall x (\exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(x, y)) \rightarrow L(\mathbf{П}, x))$$

$$\varphi_2 = L(\mathbf{С}, \mathbf{пв}) \quad \psi_2 = \exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(\mathbf{С}, y))$$

$$\varphi_3 = L(\mathbf{П}, \mathbf{пв}) \quad \psi_3 = \psi_2 \rightarrow \varphi_4$$

$$\varphi_4 = L(\mathbf{П}, \mathbf{С})$$

$$\chi = \exists x L(x, \mathbf{Д})$$



Решение методом семантических таблиц

$$\varphi_1 = L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) \quad \psi_1 = \forall x (\exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(x, y)) \rightarrow L(\mathbf{П}, x))$$

$$\varphi_2 = L(\mathbf{С}, \mathbf{пв}) \quad \psi_2 = \exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(\mathbf{С}, y))$$

$$\varphi_3 = L(\mathbf{П}, \mathbf{пв}) \quad \psi_3 = \psi_2 \rightarrow \varphi_4$$

$$\varphi_4 = L(\mathbf{П}, \mathbf{С}) \quad \psi_4 = \exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(\mathbf{Д}, y))$$

$$\varphi_5 = L(\mathbf{П}, \mathbf{Д}) \quad \psi_5 = \psi_4 \rightarrow \varphi_5$$

$$\chi = \exists x L(x, \mathbf{Д})$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi \rangle$$

$\downarrow L\forall$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1, \psi_5 \mid \chi \rangle$$

$\swarrow \quad L\rightarrow \quad \searrow$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \psi_1 \mid \chi \rangle$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4 \rangle$$

$\downarrow R\exists$

$\downarrow R\exists$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \psi_1 \mid \chi, \varphi_5 \rangle$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_4 \& \varphi_1 \rangle$$

$\swarrow \quad R\& \quad \downarrow$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_1 \rangle$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_4 \rangle$$

Получен успешный табличный вывод

Значит, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi$, то есть кто-то действительно любит Дашу

Решение методом резолюций

$$\varphi_1 = L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) \quad \varphi_2 = L(\mathbf{С}, \mathbf{пв}) \quad \varphi_3 = L(\mathbf{П}, \mathbf{пв})$$

$$\psi_1 = \forall x (\exists y (L(\mathbf{П}, y) \& L(x, y)) \rightarrow L(\mathbf{П}, x))$$

$$\chi = \exists x L(x, \mathbf{Д})$$

$$\models \varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 \& \psi_1 \rightarrow \chi?$$

Этап 1: поставим отрицание над формулой

$$\neg(\varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 \& \psi_1 \rightarrow \chi)$$

Этап 2: построим равносильную ПНФ

$$\forall x \forall y \forall z \left(\begin{array}{l} L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) \& L(\mathbf{С}, \mathbf{пв}) \& L(\mathbf{П}, \mathbf{пв}) \\ \& (\neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\mathbf{П}, x)) \\ \& \neg L(z, \mathbf{Д}) \end{array} \right)$$

Этап 3: построим равновыполнимую ССФ

Формула выше — ССФ

Этап 4: перейдём к системе дизъюнктов:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}), \quad L(\mathbf{С}, \mathbf{пв}), \quad L(\mathbf{П}, \mathbf{пв}), \\ \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\mathbf{П}, x), \\ \neg L(z, \mathbf{Д}) \end{array} \right\}$$

Решение методом резолюций

Этап 5: попробуем вывести пустой дизъюнкт

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}), \quad L(\mathbf{С}, \mathbf{пв}), \quad L(\mathbf{П}, \mathbf{пв}), \\ \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\mathbf{П}, x), \\ \neg L(z, \mathbf{Д}) \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccccc} \neg L(\mathbf{П}, y') \vee \neg L(x', y') \vee L(\mathbf{П}, x') & \neg L(\mathbf{П}, y') \vee \neg L(x', y') \vee L(\mathbf{П}, x') & & L(\mathbf{С}, \mathbf{пв}) & \\ \{z/\mathbf{П}, x'/\mathbf{Д}, y'/y\} \downarrow & \{x'/\mathbf{С}, y'/y\} \downarrow & & \varepsilon \downarrow & \\ \neg L(z, \mathbf{Д}) \rightarrow \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(\mathbf{Д}, y) \rightarrow \neg L(\mathbf{П}, \mathbf{С}) \rightarrow \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(\mathbf{С}, y) \rightarrow \neg L(\mathbf{С}, \mathbf{пв}) \rightarrow \square & & & & \\ & \{y/\mathbf{С}\} \uparrow & & \{y/\mathbf{пв}\} \uparrow & \\ & L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) & & L(\mathbf{П}, \mathbf{пв}) & \end{array}$$

Построен успешный резолютивный вывод пустого дизъюнкта

Значит, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi$, то есть кто-то действительно любит Дашу

А кто?

Решение методом резолюций

$$\begin{array}{l} \neg L(z, \mathbf{Д}) \\ \downarrow \quad \theta_1 = \{z/\mathbf{П}, x'/\mathbf{Д}, y'/y\} \\ \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(\mathbf{Д}, y) \\ \downarrow \quad \theta_2 = \{y/\mathbf{С}\} \\ \neg L(\mathbf{П}, \mathbf{С}) \\ \downarrow \quad \theta_3 = \{x'/\mathbf{С}, y'/y\} \\ \neg L(\mathbf{П}, y) \vee \neg L(\mathbf{С}, y) \\ \downarrow \quad \theta_4 = \{y/\mathbf{пв}\} \\ \neg L(\mathbf{С}, \mathbf{пв}) \\ \downarrow \quad \theta_5 = \varepsilon \\ \square \end{array}$$

Тайный поклонник Даши в выводе обозначен переменной z
Посмотрим, как эта переменная изменялась унификаторами:

$$z\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 = \mathbf{П}$$

Оказывается, что Дашу любит Паша (*но могут быть и другие поклонники*)

Для самостоятельного размышления (трудное):

А для каких резолютивных выводов такое извлечение ответа из композиции подстановок действительно работает, и почему?