Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 26

Даша, Саша, Паша, пиво
и метод семантических таблиц
с методом резолюций

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

Вступление

В блоке 6 была в качестве иллюстрации предложена такая задача

Дано:

- Даша любит Сашу,

$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С})$$

- а Саша любит пиво,

$$\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{пв})$$

- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{пв}) \\ \psi_1 &= \forall \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x})) \end{aligned}$$

Выяснить, любит ли кто-нибудь Дашу

$$\chi = \exists \mathrm{x}\ \mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Д})$$

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \varphi_0?$$

Или, по теореме о логическом следствии:

$$\models \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi?$$

Попробуем решить эту задачу методом семантических таблиц и методом резолюций

Решение методом семантических таблиц

$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) \qquad \psi_1 = \forall \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}))$$

$$\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{пв}) \qquad \psi_2 = \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{С}, \mathrm{y}))$$

$$\varphi_3 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{пв}) \qquad \psi_3 = \psi_2 \to \varphi_4$$

$$\varphi_4 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{С})$$

$$\chi = \exists \mathrm{x}\ \mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Д})$$

$$\langle \mid \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi \rangle$$

$$\downarrow R\!\to,\ L\&,\ L\&,\ L\&$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi \rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_3 \mid \chi \rangle$$

$$L\!\to$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2 \rangle$$

$$\downarrow R\exists$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \rangle$$

$$R\&$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2, \varphi_2 \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \mid \chi, \psi_2, \varphi_3 \rangle$$

Решение методом семантических таблиц

$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) \qquad \psi_1 = \forall \mathrm{x}\, (\exists \mathrm{y}\, (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}))$$

$$\varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{пв}) \qquad \psi_2 = \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{С}, \mathrm{y}))$$

$$\varphi_3 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{пв}) \qquad \psi_3 = \psi_2 \to \varphi_4$$

$$\varphi_4 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{С}) \qquad \psi_4 = \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{Д}, \mathrm{y}))$$

$$\varphi_5 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{Д}) \qquad \psi_5 = \psi_4 \to \varphi_5$$

$$\chi = \exists \mathrm{x}\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Д})$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi \rangle$$

$$\downarrow L\forall$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1, \psi_5 \mid \chi \rangle$$

$$\swarrow \quad L\to \quad \searrow$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \psi_1 \mid \chi \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4 \rangle$$

$$\downarrow R\exists \qquad \downarrow R\exists$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \psi_1 \mid \chi, \varphi_5 \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_4 \,\&\, \varphi_1 \rangle$$

$$\swarrow \quad R\& \quad \downarrow$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_1 \rangle \qquad \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_1 \mid \chi, \psi_4, \varphi_4 \rangle$$

Получен успешный табличный вывод

Значит, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi$, то есть кто-то действительно любит Дашу

Решение методом резолюций

$$\varphi_1 = \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) \quad \varphi_2 = \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{пв}) \quad \varphi_3 = \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{пв})$$
$$\psi_1 = \forall \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}))$$
$$\chi = \exists \mathrm{x}\ \mathrm{L}(\mathrm{x}, \textbf{Д})$$
$$\models \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi?$$

Этап 1: поставим отрицание над формулой

$$\neg(\varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3 \,\&\, \psi_1 \to \chi)$$

Этап 2: построим равносильную ПНФ

$$\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\ \left(\begin{array}{c} \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{пв}) \,\&\, \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{пв}) \\ \&(\neg \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x})) \\ \& \neg \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) \end{array} \right)$$

Этап 3: построим равновыполнимую ССФ

Формула выше — ССФ

Этап 4: перейдём к системе дизъюнктов:

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}), \qquad \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{пв}), \qquad \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{пв}), \\ \neg \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}), \\ \neg \mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) \end{array} \right\}$$

Решение методом резолюций

Этап 5: попробуем вывести пустой дизъюнкт

$$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}), \quad \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{пв}), \quad \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{пв}), \\ \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}), \\ \neg\mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) \end{array}\right\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}') \vee \neg\mathrm{L}(\mathrm{x}', \mathrm{y}') \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}') \arrow[d, "{\{\mathrm{z}/\textbf{П}, \mathrm{x}'/\textbf{Д}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\}}"'] & & \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}') \vee \neg\mathrm{L}(\mathrm{x}', \mathrm{y}') \vee \mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{x}') \arrow[d, "{\{\mathrm{x}'/\textbf{С}, \mathrm{y}'/\mathrm{y}\}}"'] & & \mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{пв}) \arrow[d, "\varepsilon"'] \\
\neg\mathrm{L}(\mathrm{z}, \textbf{Д}) \arrow[r] & \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{L}(\textbf{Д}, \mathrm{y}) \arrow[r] & \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{С}) \arrow[r] & \neg\mathrm{L}(\textbf{П}, \mathrm{y}) \vee \neg\mathrm{L}(\textbf{С}, \mathrm{y}) \arrow[r] & \neg\mathrm{L}(\textbf{С}, \textbf{пв}) \arrow[r] & \square \\
 & & \mathrm{L}(\textbf{Д}, \textbf{С}) \arrow[u, "{\{\mathrm{y}/\textbf{С}\}}"] & & \mathrm{L}(\textbf{П}, \textbf{пв}) \arrow[u, "{\{\mathrm{y}/\textbf{пв}\}}"] &
\end{tikzcd}$$

Построен успешный резолютивный вывод пустого дизъюнкта

Значит, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1 \models \chi$, то есть кто-то действительно любит Дашу

А кто?

Решение методом резолюций

$$
\begin{array}{cl}
\neg L(z, \textbf{Д}) & \\
\downarrow & \theta_1 = \{z/\textbf{П}, x'/\textbf{Д}, y'/y\} \\
\neg L(\textbf{П}, y) \vee \neg L(\textbf{Д}, y) & \\
\downarrow & \theta_2 = \{y/\textbf{С}\} \\
\neg L(\textbf{П}, \textbf{С}) & \\
\downarrow & \theta_3 = \{x'/\textbf{С}, y'/y\} \\
\neg L(\textbf{П}, y) \vee \neg L(\textbf{С}, y) & \\
\downarrow & \theta_4 = \{y/\textbf{пв}\} \\
\neg L(\textbf{С}, \textbf{пв}) & \\
\downarrow & \theta_5 = \varepsilon \\
\square &
\end{array}
$$

Тайный поклонник Даши в выводе обозначен переменной z

Посмотрим, как эта переменная изменялась унификаторами:

$$z\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 = \textbf{П}$$

Оказывается, что Дашу любит Паша (*но могут быть и другие поклонники*)

Для самостоятельного размышления:

А для каких резолютивных выводов такое извлечение ответа из композиции подстановок действительно работает, и почему?