

## ЗАДАЧИ ПО АВТОМАТАМ-РАСПОЗНАВАТЕЛЯМ

1. Построить диаграммы Мура для автоматов в алфавите  $\{0, 1\}$ , которые допускают следующие множества:

- $\{0, 10\}$ ;
- все слова длины 3;
- все слова, которые начинаются словом 01;
- все слова, которые оканчиваются словом 00;
- все слова, которые содержат слово 110;
- все слова из множества  $\{0, 1\}^* \setminus \{0, 1, \Lambda\}$ .

2. Доказать конечную автоматность следующих множеств:

- любое конечное множество в алфавите  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ ;
- любое множество вида  $A^* \setminus X$ , где  $X$  — конечное множество слов в алфавите  $A$ ;
- множество всех слов вида  $a_i^n$ , где  $1 \leq i \leq m$ ;
- множество всех слов в алфавите  $\{0, 1\}$ , которые имеют четную длину, начинаются буквой 0 и в которых буквы 0 и 1 чередуются;
- множество всех слов в алфавите  $\{0, 1\}$ , которые составлены из „блоков“ 010 и 001.

3. Построив на множестве  $\{0, 1\}^*$  подходящие правоинвариантные отношения эквивалентности конечного индекса, доказать конечную автоматность следующих множеств:

- $\{\Lambda\}$ ;
- $\{0\}$ ;
- $\{\Lambda, 0, 1\}$ ;
- $\{0^n 1 : n = 0, 1, \dots\}$ .

4. Для любого  $n \geq 2$  определить на множестве  $\{0, 1\}^*$  правоинвариантную эквивалентность индекса  $n$ .

5. По аналогии с правоинвариантной эквивалентностью определим на множестве  $A^*$  левоинвариантную эквивалентность: если  $\bar{a} \sim \bar{b}$  и  $\bar{c}$  — произвольное слово из  $A^*$ , то  $\bar{c}\bar{a} \sim \bar{c}\bar{b}$ .

Будет ли для левоинвариантной эквивалентности справедлив аналог теоремы 2 из лекций (о представлении произвольного конечно-автоматного множества в виде объединения некоторого количества классов левоинвариантного отношения эквивалентности конечного индекса)?

6. Определим операцию  ${}^2X$  градуированного возведения в квадрат. Для произвольного множества слов  $X$  множество  ${}^2X$  состоит из всех слов вида  $\bar{a}\bar{a}$ , где  $\bar{a} \in X$ .

Сохраняет ли введенная операция конечную автоматность множеств?

7. Доказать замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно операций объединения и пересечения, используя операцию прямого произведения автоматов.

8. Какие множества допускают следующие недетерминированные автоматы (предварительно построить для них диаграммы Мура):

а)  $Q = \{q_1, q_2\}$ ,  $f(0, q_1) = \{q_1, q_2\}$ ,  $f(1, q_1) = \{q_2\}$ ,  $f(0, q_2) = \{q_2\}$ ,  $f(1, q_2) = \{q_1, q_2\}$ ,  $F = \{q_2\}$  и  $F = \{q_1\}$ .

б)  $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ ,  $f(0, q_1) = \{q_2\}$ ,  $f(1, q_1) = \{q_1, q_2\}$ ,  $f(0, q_2) = \{q_3\}$ ,  $f(1, q_2) = \{q_3\}$ ,  $f(0, q_3) = \{q_3\}$ ,  $f(1, q_3) = \{q_2, q_3\}$ ,  $F = \{q_3\}$ .

в)  $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ ,  $f(0, q_1) = \{q_1, q_2\}$ ,  $f(1, q_1) = \{q_1\}$ ,  $f(0, q_2) = \{q_2\}$ ,  $f(1, q_2) = \{q_2, q_3\}$ ,  $f(0, q_3) = \{q_1, q_3\}$ ,  $f(1, q_3) = \{q_1, q_3\}$ ,  $F = \{q_3\}$ .

9. Для заданных недетерминированных автоматов методом детерминизации построить эквивалентный детерминированный автомат (допускающий то же самое множество слов):

а) задача 8а, оба случая;

б)  $Q = \{q_1, q_2\}$ ,  $f(0, q_1) = \{q_1\}$ ,  $f(1, q_1) = \{q_1, q_2\}$ ,  $f(0, q_2) = \{q_1, q_2\}$ ,  $f(1, q_2) = \{q_1\}$ ,  $F = \{q_2\}$ .

в) задача 8б.

10. Отправляясь от множеств  $\{0\}$  и  $\{1\}$ , построить с помощью операций объединения, произведения и итерации множество всех слов в алфавите  $\{0, 1\}$ , которые содержат подслово 0001.

11. Пусть  $\bar{a}$  — слово в алфавите  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ . Сколько раз нужно применить операцию итерации, чтобы получить множество  $A^* \setminus \{\bar{a}\}$  из множеств  $\{a_1\}, \dots, \{a_m\}$  с помощью операций объединения, произведения и итерации?

12. Пусть множество  $X$  состоит из  $n$  слов. Может ли множество  $X \cdot X$  содержать  $n^2$  слов? меньше, чем  $n^2$  слов? меньше, чем  $n$  слов? Привести примеры.

13. Доказать регулярность следующих множеств слов в алфавите  $\{0, 1\}$ :

- a) любое конечное множество слов;
- b) дополнение (до множества  $\{0, 1\}^*$ ) к любому конечному множеству слов;
- c) множество всех слов, представимых в виде произведения заданных слов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ ;
- d) множество всех слов, содержащих в качестве подслова одно из слов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ ;
- e) множество всех слов, которые не содержат ни одно из заданных слов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ ;
- f) множество всех слов, длины которых имеют вид  $5k + 1$  или  $5k + 3$ .

14. Для автоматов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  построить (недетерминированный) автомат, который допускает множество  $D(\mathcal{A}) \cdot D(\mathcal{B})$ :

- a) автомат  $\mathcal{A}$ :  $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ ,  $f(0, q_1) = q_2$ ,  $f(1, q_1) = q_1$ ,  $f(0, q_2) = q_2$ ,  $f(1, q_2) = q_3$ ,  $f(0, q_3) = q_1$ ,  $f(1, q_3) = q_3$ ,  $F = \{q_1, q_3\}$ ;
- автомат  $\mathcal{B}$ :  $Q = \{q_1, q_2\}$ ,  $f(0, q_1) = q_1$ ,  $f(1, q_1) = q_2$ ,  $f(0, q_2) = q_2$ ,  $f(1, q_2) = q_2$ ,  $F = \{q_2\}$ ;
- b) автомат  $\mathcal{A}$ :  $Q = \{q_1, q_2\}$ ,  $f(0, q_1) = q_1$ ,  $f(1, q_1) = q_2$ ,  $f(0, q_2) = q_1$ ,  $f(1, q_2) = q_2$ ,  $F = \{q_2\}$ ;
- автомат  $\mathcal{B}$ :  $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ ,  $f(0, q_1) = q_2$ ,  $f(1, q_1) = q_3$ ,  $f(0, q_2) = q_2$ ,  $f(1, q_2) = q_2$ ,  $f(0, q_3) = q_3$ ,  $f(1, q_3) = q_1$ ,  $F = \{q_2, q_3\}$ .

15. Для автомата  $\mathcal{A}$  построить (недетерминированный) автомат  $\mathcal{C}$ , у которого  $D(\mathcal{C}) = D(\mathcal{A})^*$ :

- a) автомат  $\mathcal{A}$  из задачи 14а;
- b) автомат  $\mathcal{B}$  из задачи 14б.

16. Пусть  $X$  — конечно-автоматное множество в алфавите  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ ,  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  — произвольные слова в алфавите  $A$ . Доказать, что в результате одновременной замены букв  $a_1, \dots, a_m$  словами  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  во всех словах множества  $X$  образуется конечно-автоматное множество.

17. Пусть  $X$  — конечно-автоматное множество в алфавите  $A$ ,  $Y$  — конечно-автоматное множество в однобуквенном алфавите. Обозначим через  $X/Y$  множество всех тех слов из  $X$ , длины которых являются длинами слов из  $Y$ . Доказать, что множество  $X/Y$  конечно-автоматно.

18. Пусть  $X$  — конечно-автоматное множество,  $\text{Rev}(X)$  — множество всех слов, обратных к словам из  $X$  (т.е. слов, прочитанных справа налево). Доказать, что множество  $\text{Rev}(X)$  конечно-автоматно.