

Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 5

Полнота табличного вывода
Теорема Лёвенгейма-Сколема
Теорема компактности Мальцева
Теорема Чёрча
Автоматизация доказательства теорем

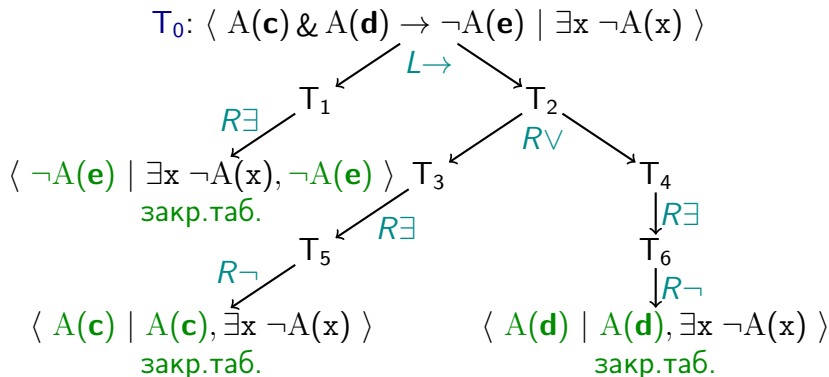
Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

Напоминание

Корректность табличного вывода в логике предикатов:

если для таблицы T_0 существует **успешный** табличный вывод, то таблица T_0 невыполнима



Полнота табличного вывода

А верно ли обратное утверждение?

(если таблица невыполнима,
то для неё существует успешный табличный вывод)

То есть

всегда ли можно обосновать общезначимость формулы, используя только метод семантических таблиц?

Это и есть **ПОЛНОТА** табличного вывода

Теорема(о полноте табличного вывода)

Для любой невыполнимой семантической таблицы существует успешный табличный вывод

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

Пусть $T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$ — невыполнимая таблица

Для простоты считаем, что

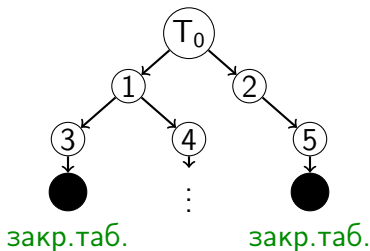
- ▶ множества Γ_0, Δ_0 конечны
- ▶ все формулы из Γ_0, Δ_0 замкнуты
- ▶ формулы из Γ_0, Δ_0 не содержат функциональных символов

Опишем стратегию построения табличного вывода, позволяющую доказать невыполнимость таблицы T_0

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

При построении табличного вывода для T_0 будем придерживаться трёх правил:

1. Незакрытые неатомарные таблицы обрабатываются в порядке появления при построении вывода (*то есть дерево вывода обходится в ширину*)

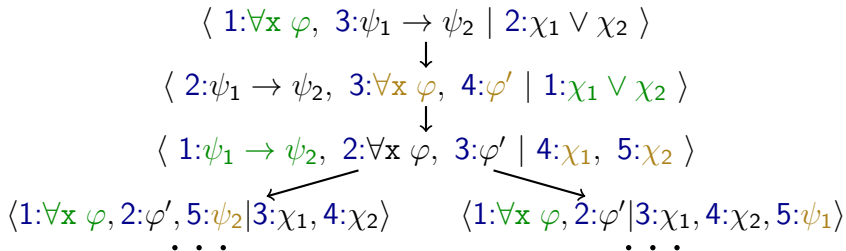


Результат: каждая таблица каждой ветви вывода рано или поздно будет построена

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

При построении табличного вывода для T_0 будем придерживаться трёх правил:

2. Все неатомарные формулы таблицы упорядочены, правило вывода применяется к **первой формуле**, результат применения записывается **последним**



Результат: в каждой бесконечной ветви вывода каждая неатомарная формула рано или поздно будет обработана

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

При построении табличного вывода для T_0 будем придерживаться трёх правил:

3. При применении правил $L\forall$, $R\exists$ подставляются **все** имеющиеся в таблице константы (**c**, если констант нет)

$$\begin{aligned} & \langle \forall x \varphi, \exists x \psi \mid \exists x \chi \rangle \\ & \quad \downarrow L\forall \\ & \langle \forall x \varphi, \exists x \psi, \varphi \{x/c\} \mid \exists x \chi \rangle \\ & \quad \downarrow E\exists \\ & \langle \forall x \varphi, \psi \{x/d\}, \varphi \{x/c\} \mid \exists x \chi \rangle \\ & \quad \downarrow R\exists \times 2 \\ & \langle \forall x \varphi, \psi \{x/d\}, \varphi \{x/c\} \mid \exists x \chi, \chi \{x/c\}, \chi \{x/d\} \rangle \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

Результат: в каждой бесконечной ветви вывода каждая константа рано или поздно будет подставлена для каждого неустранимого квантора

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

Покажем, что вывод \mathcal{D} , построенный по этой стратегии для невыполнимой таблицы $T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$, успешен

Предположим, что это не так: вывод \mathcal{D} неуспешен — получим из этого выполнимость таблицы T_0 , *противоречащую условию теоремы*

Заменим в \mathcal{D} каждую незакрытую атомарную таблицу T_{atom} на бесконечную ветвь $T_{atom} \rightarrow T_{atom} \rightarrow T_{atom} \rightarrow \dots$

Тогда в полученном выводе обязательно найдётся бесконечная ветвь \mathcal{T} , состоящая только из незакрытых таблиц:

$$T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots$$

По этой ветви построим интерпретацию \mathcal{I} , такую что:

- ▶ каждая формула из Γ_0 выполнима в \mathcal{I}
- ▶ каждая формула из Δ_0 невыполнима в \mathcal{I}

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

$$\mathfrak{T}: T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

$\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, -, \overline{\text{Pred}} \rangle$, где

- ▶ предметная область D — это все константы всех формул в \mathfrak{T} :
$$D = \bigcup_{i \geq 0} \text{Const}_i = \text{Const}_\omega, \text{ где } \text{Const}_i \text{ — все константы в } T_i$$
- ▶ значение каждой константы — это её изображение (*она сама*):
$$\overline{c} = c$$
- ▶ предикат истинен = он встречается в левых частях таблиц \mathfrak{T} :
$$\overline{P}(c_1, \dots, c_k) = t \quad \Leftrightarrow \quad P(c_1, \dots, c_k) \in \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i = \Gamma_\omega$$

Осталось показать *индукцией по структуре формулы*, что

- ▶ каждая формула из Γ_ω выполнима в \mathcal{I}
- ▶ каждая формула из $\Delta_\omega = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$ невыполнима в \mathcal{I}

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

$$\mathfrak{T}: T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, \quad T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$
$$\varphi \in \Gamma_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad \varphi \in \Delta_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi$$

База индукции: φ — атом

Тогда φ имеет вид $P(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$, где $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k \in \text{Const}_\omega$ (почему?)

Подслучай 1: $P(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) \in \Gamma_\omega$

Тогда $\bar{P}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) = \mathbf{t}$, а значит, $\mathcal{I} \models \varphi$

Подслучай 2: $P(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) \in \Delta_\omega$

Тогда $P(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) \notin \Gamma_\omega$ (почему?)

Значит, $\bar{P}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k) = \mathbf{f}$ и $\mathcal{I} \not\models \varphi$

Индуктивный переход

Предположение индукции: для каждой формулы, содержащей менее N логических операций, утверждение доказано

Рассматриваемый случай: формула φ содержит ровно N логических операций

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

$$\mathfrak{I}: T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$
$$\varphi \in \Gamma_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathfrak{I} \models \varphi \qquad \varphi \in \Delta_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathfrak{I} \not\models \varphi$$

Переход 1: φ имеет вид $\psi \rightarrow \chi$

Подслучай 1: $\varphi \in \Gamma_\omega$

В ветви \mathfrak{I} существует таблица T_i , такая что правило вывода применяется к φ в левой части этой таблицы (почему?)

Значит, верно хотя бы одно из двух: (почему?)

- ▶ $\psi \in \Gamma_{i+1}$, и тогда $\mathfrak{I} \models \psi$ и $\mathfrak{I} \models \varphi$
- ▶ $\chi \in \Delta_{i+1}$, и тогда $\mathfrak{I} \not\models \chi$ и $\mathfrak{I} \models \varphi$

Подслучай 2: $\varphi \in \Delta_\omega$ — рассуждения аналогичны

Переход 2/3/4: формула φ имеет вид $\psi \& \chi / \psi \vee \chi / \neg\psi$ — рассуждения аналогичны

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}: T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle \\ \varphi \in \Gamma_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \models \varphi \qquad \varphi \in \Delta_\omega \stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{I} \not\models \varphi \end{aligned}$$

Переход 5: формула φ имеет вид $\forall x \psi$

Подслучай 1: $\varphi \in \Gamma_\omega$

Тогда $\varphi \{x/c\} \in \Gamma_\omega$ для любой константы $c \in \text{Const}_\omega$ (почему?)

Значит, для любой константы $c \in \text{Const}_\omega$ верно: $\mathcal{I} \models \varphi \{x/c\}$

Но это и означает $\mathcal{I} \models \forall x \varphi$

Подслучай 2: $\varphi \in \Delta_\omega$

В ветви \mathfrak{T} существует таблица T_i , такая что правило вывода применяется к φ в правой части этой таблицы

Значит, $\varphi \{x/c\} \in \Delta_{i+1}$ для некоторой $c \in \text{Const}_{i+1} \subseteq \text{Const}_\omega$

Тогда $\mathcal{I} \not\models \varphi \{x/c\}$, и следовательно, $\mathcal{I} \not\models \forall x \varphi$

Переход 6: формула φ имеет вид $\exists x \psi$ — рассуждения аналогичны

Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

$$\mathfrak{T}: T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots, T_i = \langle \Gamma_i \mid \Delta_i \rangle$$

Итоги рассуждений

Существует (и явно описана) интерпретация \mathcal{I} , такая что

- ▶ все формулы в левых частях таблиц из \mathfrak{T} выполнимы в \mathcal{I}
- ▶ все формулы в правых частях таблиц из \mathfrak{T} невыполнимы в \mathcal{I}

В частности, все формулы из Γ_0 выполнимы в \mathcal{I} ,
и все формулы из Δ_0 невыполнимы в \mathcal{I}

Значит, таблица T_0 выполнима, что противоречит условию теоремы

Противоречие получено в предположении о том, что вывод,
построенный для T_0 , неуспешен

Значит, предположение неверно: любой вывод, построенный
согласно предложенной стратегии для невыполнимой
таблицы T_0 , успешен



Теорема о полноте табличного вывода: доказательство

А что изменится в доказательстве для общего случая?

То есть:

- ▶ какой порядок обработки формул позволит “справедливо” обращаться с бесконечными множествами формул?
(хотя бы со счётно-бесконечными)
- ▶ какие термы подставлять, если в сигнатуре алфавита есть функциональные символы?
- ▶ как описать и что делать с интерпретацией \mathcal{I} , если в таблицах встречаются незамкнутые формулы?

Полнота табличного вывода

Следствие (вариант теоремы Гёделя о полноте для исчисления семантических таблиц)

$\models \varphi \iff$ для семантической таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод

Доказательство.

Следует из *корректности* и *полноты* табличного вывода и теоремы *о табличной проверке общезначимости формул* ▼

Более того, в доказательстве *теоремы о полноте* сказано, как **построить** успешный табличный вывод, если он существует

Кроме того, из теорем о корректности и полноте табличного вывода можно легко получить полезные следствия, не относящиеся к табличным выводам как таковым

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Для любого предложения φ справедлива равносильность:
 $\models \varphi \Leftrightarrow \varphi$ имеет модель с конечной или счётно-бесконечной предметной областью

Доказательство.

Корректность и *полнота*: φ выполнима \Leftrightarrow для таблицы $T_0 = \langle \varphi \mid \rangle$ не существует успешного табличного вывода

Построив вывод согласно *стратегии из доказательства полноты*, получим

- ▶ бесконечную ветвь $T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \dots$, состоящую только из незакрытых таблиц
- ▶ интерпретацию \mathcal{I} с не более чем счётно-бесконечной предметной областью, в которой выполнимы все таблицы этой ветви — в том числе таблица T_0 ▼

Теорема компактности Мальцева

Для любого предложения φ и любого множества предложений Γ справедлива равносильность:

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ существует конечное подмножество Γ' множества Γ , такое что $\Gamma' \models \varphi$

Доказательство.

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ таблица $T = \langle \Gamma \mid \varphi \rangle$ невыполнима (почему?)

\Leftrightarrow существует успешный табличный вывод \mathcal{D} для T

Подмножество Γ' формул множества Γ , к которым применяются правила и которые приводят к закрытости таблиц в \mathcal{D} , конечно (почему?)

Тогда для таблицы $\langle \Gamma' \mid \varphi \rangle$ также существует успешный табличный вывод (почему?)

Значит, $\Gamma' \models \varphi$



Автоматическое доказательство теорем

Если программно реализовать стратегию¹ построения логического вывода², то в результате получится средство автоматического доказательства теорем:

First-order theorem prover

Основная задача **прувера** — предоставлять **доказательство** общезначимости формулы (успешный вывод)

Требования, предъявляемые к прuverу:

- ▶ **корректность**: обязательно
- ▶ **полнота**: очень желательно
- ▶ **эффеkтивность**: желательно

¹ Не обязательно озвученную в доказательстве теоремы полноты, и даже не обязательно полную

² Не обязательно табличного вывода

Автоматическое доказательство теорем

Если программно реализовать стратегию построения логического вывода, то в результате получится средство автоматического доказательства теорем:

First-order theorem prover

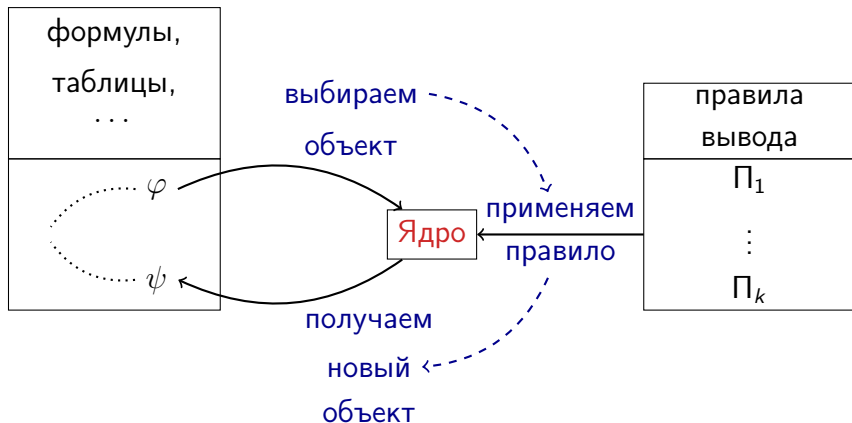
Один из многих примеров того, чего позволило добиться использование пружеров:¹ строго доказана корректность *nix-микроядра L4, и в процессе доказательства найдены и исправлены сотни ошибок в коде

¹ Klein et al. seL4: formal verification of an OS kernel. 2009.

Конкретно этот пример выбран из-за наглядности, понятности и при этом “неоспоримой полезности” формулировки результата

Автоматическое доказательство теорем

Как устроены пружеры:



Автоматическое доказательство теорем: теоретический взгляд. Теорема Чёрча

Теорема (Чёрча). Проблема общезначимости формул логики предикатов алгоритмически неразрешима

Иными словами, никакой алгоритм не способен достоверно и за конечное время решить проблему “ $\models \varphi ?$ ” для произвольной формулы φ

Но при этом существует алгоритм, способный подтвердить общезначимость формулы (например, метод семантических таблиц с полной стратегией построения успешного вывода)

Это означает, что проблема “ $\models \varphi ?$ ” **полуразрешима**, или **частично разрешима**

Автоматическое доказательство теорем: теоретический взгляд

Неразрешимость проблемы общезначимости можно доказать так:
взять известную неразрешимую проблему и свести её к " $\models \varphi$?"

Проблема останова машин Тьюринга (как известно, неразрешимая)

Дано: машина Тьюринга M , слово w

Вопрос **HALT**(M, w): остановится ли M на входном слове w ?

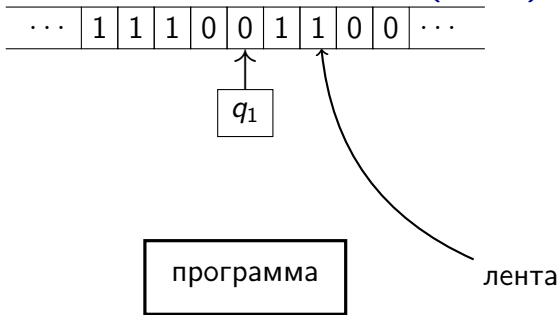
Что такое "свести"?

Предложить алгоритм, по M и w строящий формулу $\varphi_{M,w}$,
такую что

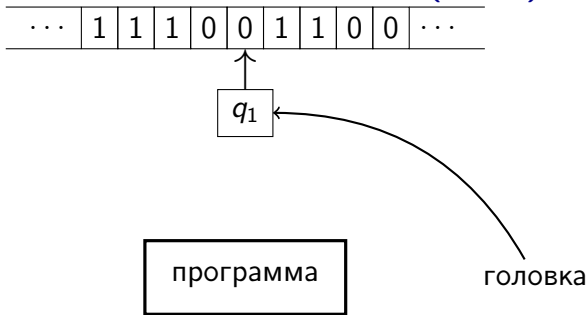
$$\mathbf{HALT}(M, w) \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi_{M,w}$$

Перед тем как описать такой алгоритм, вспомним, как выглядят
машины Тьюринга

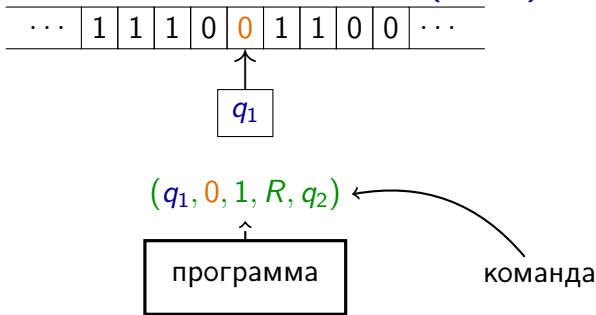
Машины Тьюринга (МТ)



Машины Тьюринга (МТ)



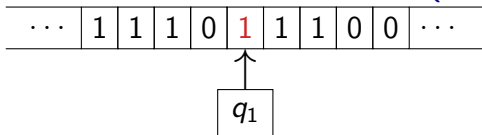
Машины Тьюринга (МТ)



Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду

Машины Тьюринга (МТ)



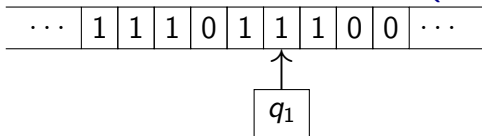
$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку **НОВЫЙ СИМВОЛ**

Машины Тьюринга (МТ)



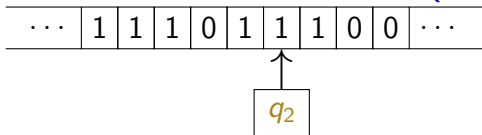
$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ **сдвигаем** головку

Машины Тьюринга (МТ)



$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ сдвигаем головку
- ▶ **меняем состояние**

Машины Тьюринга (МТ)

Определим всё с начала, по порядку и строго

\mathcal{A} — конечный ленточный алфавит, Λ — пустой символ ($\Lambda \in \mathcal{A}$)

Ленточное слово — это слово в алфавите \mathcal{A}

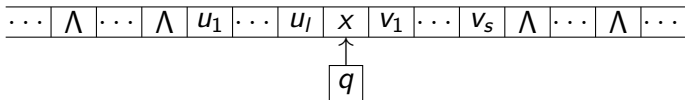
\mathcal{A}^* — множество всех конечных ленточных слов

\mathcal{Q} — конечный алфавит состояний

q_0 — начальное состояние ($q_0 \in \mathcal{Q}$)

Ленточная конфигурация — это слово вида $u q x v$, где
 $q \in \mathcal{Q}$, $x \in \mathcal{A}$, $u, v \in \mathcal{A}^*$

Пояснение: ($u = u_1 \dots u_l$, $v = v_1 \dots v_s$)



Машины Тьюринга (МТ)

Команда — это пятёрка вида (q, a, b, D, q') , где

$$q, q' \in Q, \quad a, b \in \mathcal{A}, \quad D \in \{L, R\}$$

Пояснение: если МТ находится в состоянии q и обозревает символ a в текущей ячейке, то записать в эту ячейку b , сдвинуться влево ($D = L$) или вправо ($D = R$) и перейти в состояние q'

Командой C задаётся бинарное отношение переходов \rightarrow_C на множестве конфигураций: $(z \in \mathcal{A})$

$$\triangleright u z q x v \rightarrow_{(q,x,y,L,q')} u q' z y v$$

$$\triangleright \quad q x v \rightarrow_{(q,x,y,L,q')} q' \wedge y v$$

$$\triangleright u q x z v \rightarrow_{(q,x,y,R,q')} u y q' z v$$

$$\triangleright u q x \quad \rightarrow_{(q,x,y,R,q')} u y q' \wedge$$

Машины Тьюринга (МТ)

Машина Тьюринга — это конечное множество команд

Детерминированная МТ: для любых $q \in Q$, $a \in A$ не более чем одна команда имеет вид (q, a, b, D, q')

Будем рассматривать только детерминированные МТ

Отношение переходов \rightarrow_M , задаваемое МТ M на множестве ленточных конфигураций, определяется так:

$$\rightarrow_M = \bigcup_{C \in M} \rightarrow_C$$

Конфигурация α МТ M — **заключительная**, если не существует конфигурации β , такой что $\alpha \rightarrow_M \beta$

МТ M **останавливается** на слове w (**HALT**(M, w)), если какая-либо заключительная конфигурация α_{fin} **достижима** из **начальной** конфигурации $(q_0 w)$:

$$q_0 w \rightarrow_M \cdots \rightarrow_M \alpha_{fin} \not\rightarrow_M$$

Теорема Чёрча: доказательство

Сведём проблему останова **детерминированных** МТ к проблеме общезначимости формул логики предикатов

Для этого опишем, как можно по МТ M и ленточному слову w построить формулу $\varphi_{M,w}$, такую что

$$\mathbf{HALT}(M, w) \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi_{M,w}$$

Что будет записано в формуле:

Если **начальная конфигурация достижима** и **конфигурация, следующая за достижимой, также достижима**, то **достижима некоторая заключительная конфигурация**

$$\varphi_{start} \ \& \ \varphi_{step} \ \rightarrow \ \varphi_{finish}$$

Теорема Чёрча: доказательство

Сигнатура формулы $\varphi_{M,w}$:

- ▶ константа **a** для каждого $a \in \mathcal{A}$
- ▶ константа **q** для каждого $q \in \mathcal{Q}$
- ▶ функциональный символ, обозначающий операцию конкатенации ленточных слов: $\cdot^{(2)}$
(ассоциативную вправо в инфиксной записи)
- ▶ предикатный символ, обозначающий отношение достижимости конфигурации из начальной: $\text{Re}^{(3)}$

Компоненты формулы $\varphi_{M,w}$:

- ▶ терм, обозначающий ленточное слово $a_1 \dots a_p$

$$\widetilde{a_1 \dots a_p} = \mathbf{a}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{a}_p$$

- ▶ атом “конфигурация $u q v$ достижима” $((a_1 \dots a_p)^- = a_p \dots a_1)$

$$\text{Re}(\widetilde{u^-}, \mathbf{q}, \widetilde{v})$$

Теорема Чёрча: доказательство

Компоненты формулы $\varphi_{M,w}$:

- ▶ атом “начальная конфигурация достижима”

$$\varphi_{start}: \text{Re}(\Lambda, \mathbf{q}_0, \tilde{w})$$

- ▶ подформулы “если текущая конфигурация достижима, то конфигурация после применения команды C будет достижима”

- ▶ $C = (q, a, b, R, q')$

$$\varphi_C: \forall x \forall y (\text{Re}(x, \mathbf{q}, \mathbf{a} \cdot y) \rightarrow \text{Re}(\mathbf{b} \cdot x, \mathbf{q}', y))$$

$$\psi_C: \forall x (\text{Re}(x, \mathbf{q}, \mathbf{a}) \rightarrow \text{Re}(\mathbf{b} \cdot x, \mathbf{q}', \Lambda))$$

- ▶ $C = (q, a, b, L, q')$

$$\varphi_C: \forall x \forall y \forall z (\text{Re}(z \cdot x, \mathbf{q}, \mathbf{a} \cdot y) \rightarrow \text{Re}(x, \mathbf{q}', z \cdot \mathbf{b} \cdot y))$$

$$\psi_C: \forall x \forall y (\text{Re}(x, \mathbf{q}, \mathbf{a} \cdot y) \rightarrow \text{Re}(\Lambda, \mathbf{q}', x \cdot \mathbf{b} \cdot y))$$

- ▶ подформула

“конфигурация, следующая за достижимой, также достижима”

$$\varphi_{step}: \bigwedge_{C \in M} (\varphi_C \& \psi_C)$$

Теорема Чёрча: доказательство

Компоненты формулы $\varphi_{M,w}$:

- ▶ $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{A}$ — множество пар (q, a) , таких что в M нет команд, начинающихся с q, a , но есть команды, начинающиеся с q
- ▶ подформула
“хотя бы одна заключительная конфигурация достижима”

$$\varphi_{finish}: \exists x \exists y \left(\bigvee_{(q,a) \in \mathcal{G}} \text{Re}(x, \mathbf{q}, \mathbf{a} \cdot y) \right)$$

Возвращаемся к тому, что нужно доказать:

HALT(M, w): МТ M останавливается на слове w

$\varphi_{M,w}$: $\varphi_{start} \ \& \ \varphi_{step} \rightarrow \varphi_{finish}$

$$\mathbf{HALT}(M, w) \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi_{M,w}$$

Теорема Чёрча: доказательство

$$\text{HALT}(M, w) \Leftrightarrow \models \varphi_{M,w}$$

(\Leftarrow): если формула $\varphi_{M,w}$ истинна в любой интерпретации, то она истинна и в такой интерпретации \mathcal{I} :

$\overline{\text{Re}}(\tilde{u}^-, \mathbf{q}, \tilde{v}) =$ “конфигурация $u q v$ достижима из $q_0 w$ для M ”

(\Rightarrow): предположим от противного, что $\text{HALT}(M, w)$ верно, но формула $\varphi_{M,w}$ необщезначима

Тогда существует интерпретация \mathcal{I} , такая что $\mathcal{I} \not\models \varphi_{M,w}$:

$$\mathcal{I} \models \varphi_{\text{start}}, \quad \mathcal{I} \models \varphi_{\text{step}}, \quad \mathcal{I} \not\models \varphi_{\text{finish}}$$

Рассмотрим работу МТ M на слове w :

$$q_0 w \rightarrow_M u_1 q_1 v_1 \rightarrow_M u_2 q_2 v_2 \rightarrow_M \dots \rightarrow_M u_k q_k v_k,$$

где $u_k q_k v_k$ — заключительная конфигурация

Используя эту последовательность конфигураций, докажем, что

$$\mathcal{I} \models \varphi_{\text{finish}}$$

(это противоречие, из которого будет следовать общезначимость формулы $\varphi_{M,w}$)

Теорема Чёрча: доказательство, (\Rightarrow):

$$q_0 w \rightarrow_M u_1 q_1 v_1 \rightarrow_M u_2 q_2 v_2 \rightarrow_M \cdots \rightarrow_M u_k q_k v_k$$

Исходное предположение: формула $\varphi_{M,w}$ необщезначима

$$\begin{array}{l} \mathcal{I} \models \varphi_{start}, \quad \mathcal{I} \models \varphi_{step}, \quad \mathcal{I} \not\models \varphi_{finish} \\ \varphi_{start}: \text{Re}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{q}_0, \mathbf{w}) \quad \varphi_{finish}: \exists x \exists y \left(\bigvee_{(q,a) \in \mathcal{G}} \text{Re}(x, \mathbf{q}, \mathbf{a} \cdot y) \right) \end{array}$$

$\mathcal{I} \models \varphi_{start}$ по рассматриваемому случаю

$\mathcal{I} \models \text{Re}(\widetilde{u}_1^-, \mathbf{q}_1, \widetilde{v}_1)$, так как $\varphi_{start}, \varphi_{step} \models \text{Re}(\widetilde{u}_1^-, \mathbf{q}_1, \widetilde{v}_1)$

...

$\mathcal{I} \models \text{Re}(\widetilde{u}_k^-, \mathbf{q}_k, \widetilde{v}_k)$, так как

$$\text{Re}(\widetilde{u}_{k-1}^-, \mathbf{q}_{k-1}, \widetilde{v}_{k-1}), \varphi_{step} \models \text{Re}(\widetilde{u}_k^-, \mathbf{q}_k, \widetilde{v}_k)$$

$\mathcal{I} \models \varphi_{finish}$, так как $\text{Re}(\widetilde{u}_k^-, \mathbf{q}_k, \widetilde{v}_k) \models \varphi_{finish}$

Но согласно *исходному предположению*, верно $\mathcal{I} \not\models \varphi_{finish}$

Значит, *исходное предположение* неверно:

формула $\varphi_{M,w}$ общезначима



Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

С точки зрения практики, неразрешимость проблемы общезначимости означает, что любой прouver будет либо содержать неполную стратегию вывода, либо в некоторых случаях будет зацикливаться, и избежать этого никак нельзя

Но если мы **абсолютно уверены**, что формула φ , подаваемая на вход, общезначима, и хотим предоставить **доказательство** её общезначимости, то это сделать можно

Например, с помощью *метода семантических таблиц*

Но будет ли доказательство общезначимости вычисляться за разумное время?

- ▶ К какой формуле применять правило табличного вывода?
- ▶ При применении правил $L\forall$, $R\exists$ какие термы подставлять?

Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

Выбор формулы

Как избежать перебора всех формул таблицы?

| База знаний | Запрос |
|--|--|
| <p>В огороде бузина Растёт(бузина, огород)</p> <p>Всё в огороде посадил дядька $\forall x (\text{Растёт}(x, \text{огород}) \rightarrow$ $\exists y (\text{Посадил}(y, x) \& \text{Дядька}(y)))$</p> <p>Бузину сажают только Киевляне $\forall x (\text{Посадил}(x, \text{бузина})$ $\rightarrow \text{Живёт}(x, \text{Киев}))$</p> | <p>В Киеве дядька $\exists y (\text{Дядька}(y)$ $\& \text{Живёт}(y, \text{Киев}))$</p> |

Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

Выбор терма

$$L\forall \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} | \Delta \rangle}$$

$$R\exists \frac{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \rangle}$$

Может быть, достаточно подставлять только “неглубокие” термы, построенные из содержащихся в таблице?

Из одного функционального символа $f^{(2)}$, использующегося 10 раз, и двух констант c_1, c_2 можно построить более 10^{300} термов

Гугол — это 10^{100} ,

и это больше числа атомов в наблюдаемой вселенной

Можно ли как-то сократить перебор подставляемых термов?

В некоторой степени — да, можно^{1,2}

¹ J.A. Robinson: метод резолюций — о нём будут следующие лекции

² С.Ю. Маслов: обратный вывод