Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2017, весенний семестр

Лекция 5

Полнота табличного вывода

Теорема Лёвенгейма-Сколема

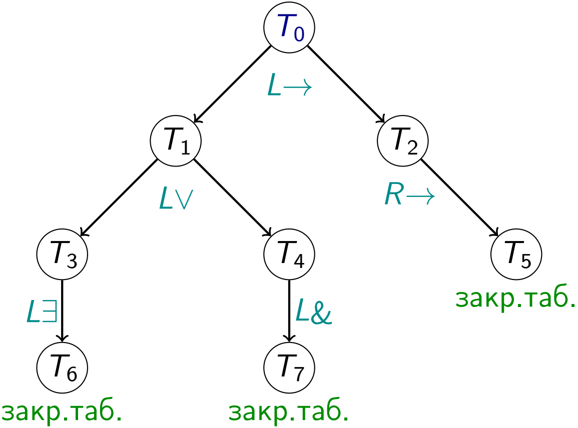
Теорема компактности Мальцева

Автоматическое доказательство теорем

Теорема Чёрча

Напоминание

Корректность табличного вывода в логике предикатов:



Если для таблицы T_0 построен **успешный** табличный вывод,

то T_0 невыполнима

Полнота табличного вывода

А для любой ли

невыполнимой семантической таблицы
можно построить успешный табличный вывод?

В частности,

всегда ли мы можем убедиться в общезначимости формулы,
используя только метод семантических таблиц?

Это и есть полнота табличного вывода

Теорема полноты табличного вывода
Если семантическая таблица невыполнима, то для неё существует успешный табличный вывод

Полнота табличного вывода: доказательство

Пусть $T_0 = \langle\ \Gamma_0 \mid \Delta_0\ \rangle$ — невыполнимая таблица

Опишем **стратегию табличного вывода**, позволяющую доказать невыполнимость таблицы T_0

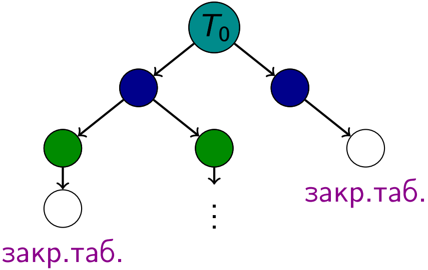
Для простоты считаем, что

- множества Γ_0, Δ_0 конечны
- все формулы из Γ_0, Δ_0 замкнуты
- формулы из Γ_0, Δ_0 не содержат функциональных символов

Полнота табличного вывода: доказательство

При построении табличного вывода для T_0 будем придерживаться следующих правил:

1. Незакрытые неатомарные таблицы обрабатываются в порядке появления при построении вывода



Результат: каждая таблица каждой ветви вывода рано или поздно будет построена

Полнота табличного вывода: доказательство

При построении табличного вывода для T_0 будем придерживаться следующих правил:

2. Все неатомарные формулы таблицы упорядочены, правило вывода применяется к первой формуле, результат применения записывается последним

$$\langle\ 1{:}\forall \mathtt{x}\ \varphi,\ 3{:}\psi_1 \to \psi_2 \mid 2{:}\chi_1 \vee \chi_2\ \rangle$$
$$\downarrow$$
$$\langle\ 2{:}\psi_1 \to \psi_2,\ 3{:}\forall \mathtt{x}\ \varphi,\ 4{:}\varphi' \mid 1{:}\chi_1 \vee \chi_2\ \rangle$$
$$\downarrow$$
$$\langle\ 1{:}\psi_1 \to \psi_2,\ 2{:}\forall \mathtt{x}\ \varphi,\ 3{:}\varphi' \mid 4{:}\chi_1,\ 5{:}\chi_2\ \rangle$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\langle 1{:}\forall \mathtt{x}\ \varphi, 2{:}\varphi', 5{:}\psi_2 \mid 3{:}\chi_1, 4{:}\chi_2\rangle \qquad \langle 1{:}\forall \mathtt{x}\ \varphi, 2{:}\varphi' \mid 3{:}\chi_1, 4{:}\chi_2, 5{:}\psi_1\rangle$$
$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

Результат: в каждой бесконечной ветви вывода каждая неатомарная формула рано или поздно будет обработана

Полнота табличного вывода: доказательство

При построении табличного вывода для T_0 будем придерживаться следующих правил:

3. При применении правил $L\forall$, $R\exists$ подставляются **все** имеющиеся в таблице константы (**c**, если констант нет)

$$\langle\ \forall \mathrm{x}\, \varphi,\ \exists \mathrm{x}\, \psi \mid \exists \mathrm{x}\, \chi\ \rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\langle\ \forall \mathrm{x}\, \varphi,\ \exists \mathrm{x}\, \psi,\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\, \chi\ \rangle$$
$$\downarrow L\exists$$
$$\langle\ \forall \mathrm{x}\, \varphi,\ \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\},\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\, \chi\ \rangle$$
$$\downarrow R\exists \times 2$$
$$\langle\ \forall \mathrm{x}\, \varphi,\ \psi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\},\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \exists \mathrm{x}\, \chi,\ \chi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\},\ \chi\{\mathrm{x}/\mathbf{d}\}\ \rangle$$
$$\cdots$$

Результат: в каждой бесконечной ветви вывода каждая константа рано или поздно будет подставлена для каждого неустраняемого квантора

Полнота табличного вывода: доказательство

Стратегия построения табличного вывода описана

Покажем, что вывод $\mathfrak{D}$, построенный по этой стратегии для невыполнимой таблицы $T_0 = \langle\, \Gamma_0 \mid \Delta_0 \,\rangle$, успешен

Предположим, что это не так: вывод $\mathfrak{D}$ неуспешен

Заменим в $\mathfrak{D}$ каждую незакрытую атомарную таблицу T_{atom} на бесконечную ветвь $T_{atom} \to T_{atom} \to T_{atom} \to \dots$

Тогда в полученном выводе обязательно найдётся бесконечная ветвь, состоящая только из незакрытых таблиц:

$$T_0 \to T_1 \to T_2 \to \dots$$

По имеющейся бесконечной ветви построим интерпретацию $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} \models \Gamma_0, \qquad \mathcal{I} \not\models \Delta_0$$

Полнота табличного вывода: доказательство

Имеем ветвь $T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots$, $T_i = \langle\ \Gamma_i \mid \Delta_i\ \rangle$

$\mathcal{I} = \left\langle \mathsf{D}, \overline{\mathsf{Const}}, -, \overline{\mathsf{Pred}} \right\rangle$, где

- предметная область D — это все константы во всех T_i:
  $$\mathsf{D} = \bigcup_{i \geq 0} \mathsf{Const}_i = \mathsf{Const}_\omega \qquad (\mathsf{Const}_i \text{ — все константы в } T_i)$$
- значение каждой константы — это её изображение:
  $$\overline{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$$
- значение предиката = есть ли он хотя бы в одном Γ_i:
  $$\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) = \mathbf{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_k}) \in \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i = \Gamma_\omega$$

Осталось показать *индукцией по структуре формулы*, что

- любая формула из Γ_ω выполнима в $\mathcal{I}$
- любая формула из $\Delta_\omega = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$ невыполнима в $\mathcal{I}$

Полнота табличного вывода: доказательство

База индукции: рассмотрим атом $\varphi \in \Gamma_\omega \cup \Delta_\omega$

Тогда $\varphi = \mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k})$, где $\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k} \in \mathsf{Const}_\omega$ (почему?)

- Пусть $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) \in \Gamma_\omega$

  Тогда $\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) = \mathbf{t}$, а значит, $\mathcal{I} \models \varphi$

- Пусть $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) \in \Delta_\omega$

  Тогда $\mathrm{P}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) \notin \Gamma_\omega$ (почему?)

  Значит, $\overline{\mathrm{P}}(\mathbf{c_1}, \dots, \mathbf{c_k}) = \mathbf{f}$ и $\mathcal{I} \not\models \varphi$

Полнота табличного вывода: доказательство

Индуктивный переход

Утверждение: если $\chi \in \Gamma_\omega$, то $\mathcal{I} \models \chi$; если $\chi \in \Delta_\omega$, то $\mathcal{I} \not\models \chi$

Предположение: если χ содержит менее N логических операций (связок и кванторов), то утверждение верно

Рассматриваемый случай: χ содержит N логических операций

Пусть $\chi = \varphi \to \psi \in \Gamma_\omega$

В ветви $T_0 \to T_1 \to \dots$ существует таблица T_i, такая что правило вывода применяется к χ в левой части (почему?)

Тогда верно хотя бы одно из двух:

- $\psi \in \Gamma_{i+1}$, и тогда $\mathcal{I} \models \psi$ и $\mathcal{I} \models \chi$ (почему?)
- $\varphi \in \Delta_{i+1}$, и тогда $\mathcal{I} \not\models \varphi$ и $\mathcal{I} \models \chi$

Полнота табличного вывода: доказательство

Индуктивный переход

Утверждение: если $\chi \in \Gamma_\omega$, то $\mathcal{I} \models \chi$; если $\chi \in \Delta_\omega$, то $\mathcal{I} \not\models \chi$

Предположение: если χ содержит менее N логических операций (связок и кванторов), то утверждение верно

Рассматриваемый случай: χ содержит N логических операций

Пусть
$\chi = \varphi \to \psi \in \Gamma_\omega$ $\qquad$ $\chi = \varphi \to \psi \in \Delta_\omega$
$\chi = \varphi \,\&\, \psi \in \Gamma_\omega$ $\qquad$ $\chi = \varphi \,\&\, \psi \in \Delta_\omega$
$\chi = \varphi \vee \psi \in \Gamma_\omega$ $\qquad$ $\chi = \varphi \vee \psi \in \Delta_\omega$
$\chi = \neg\varphi \in \Gamma_\omega$ $\qquad$ $\chi = \neg\varphi \in \Delta_\omega$

Во всех этих случаях рассуждения аналогичны

Полнота табличного вывода: доказательство

Индуктивный переход
Утверждение: если $\chi \in \Gamma_\omega$, то $\mathcal{I} \models \chi$; если $\chi \in \Delta_\omega$, то $\mathcal{I} \not\models \chi$
Предположение: если χ содержит менее N логических операций (связок и кванторов), то утверждение верно
Рассматриваемый случай: χ содержит N логических операций

Пусть $\chi = \forall \mathtt{x}\, \varphi \in \Gamma_\omega$

Тогда $\varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \in \Gamma_\omega$ для любой константы $\mathbf{c} \in \mathrm{Const}_\omega$ (почему?)

Значит, для любой константы $\mathbf{c} \in \mathrm{Const}_\omega$ верно: $\mathcal{I} \models \varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\}$

Но это и означает $\mathcal{I} \models \forall \mathtt{x}\, \varphi$

Пусть $\psi = \exists \mathtt{x}\, \varphi \in \Delta_\omega$
Рассуждения в этом случае аналогичны

Полнота табличного вывода: доказательство

Индуктивный переход
Утверждение: если $\chi \in \Gamma_\omega$, то $\mathcal{I} \models \chi$; если $\chi \in \Delta_\omega$, то $\mathcal{I} \not\models \chi$
Предположение: если χ содержит менее N логических операций (связок и кванторов), то утверждение верно
Рассматриваемый случай: χ содержит N логических операций

Пусть $\chi = \forall \mathtt{x}\, \varphi \in \Delta_\omega$

В одной из таблиц T_i к формуле χ в правой части **обязательно** применится правило $R\exists$

Значит, $\varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \in \Delta_{i+1}$ для некоторой $\mathbf{c} \in \mathrm{Const}_{i+1} \subseteq \mathrm{Const}_\omega$

Тогда $\mathcal{I} \not\models \varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\}$, а значит, $\mathcal{I} \not\models \forall \mathtt{x}\, \varphi$

Пусть $\chi = \exists \mathtt{x}\, \varphi \in \Gamma_\omega$
Рассуждения в этом случае аналогичны

Полнота табличного вывода: доказательство

Имеем ветвь $T_0 \to T_1 \to T_2 \to \ldots,\ T_i = \langle\ \Gamma_i \mid \Delta_i\ \rangle$

Итог: $\mathcal{I} \models \Gamma_\omega, \qquad \mathcal{I} \not\models \Delta_\omega$

А что требуется найти?

Противоречие с тем, что таблица $T_0 = \langle\ \Gamma_0 \mid \Delta_0\ \rangle$ **невыполнима**

Имеем: $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_\omega, \qquad \Delta_0 \subseteq \Delta_\omega$

Значит, $\mathcal{I} \models \Gamma_0$ и $\mathcal{I} \not\models \Delta_0$

Но это и означает **выполнимость** таблицы T_0

От какого предположения мы отталкивались?

От предположения о том, что построенный для T_0 вывод $\mathfrak{D}$ **неуспешен**

Значит, нами построен **успешный** табличный вывод ▼

Полнота табличного вывода: доказательство

А что изменится в доказательстве для общего случая?

То есть:

- какой порядок обработки формул позволит “справедливо” обращаться с бесконечными множествами формул?
- какие термы подставлять, если в сигнатуре алфавита есть функциональные символы?
- как работать с интерпретацией $\mathcal{I}$, если в таблицах встречаются незамкнутые формулы?

Полнота табличного вывода

Теорема Гёделя о полноте
(вариант для *исчисления* семантических таблиц)

$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **для семантической таблицы** $\langle \quad | \ \varphi \ \rangle$ **существует успешный табличный вывод**

Доказательство.
Следует из корректности и полноты табличного вывода (*и утверждения о связи общезначимости формулы и выполнимости соответствующей таблицы*)

Более того, в доказательстве теоремы полноты сказано, **как построить** успешный табличный вывод, *если он существует*

А можно ли извлечь ещё какие-нибудь полезные факты из корректности и полноты табличного вывода?

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Формула φ выполнима $\quad\Leftrightarrow\quad$ φ имеет модель с конечной или счётно-бесконечной предметной областью

Доказательство.

Корректность и полнота: φ выполнима $\Leftrightarrow$ для таблицы $T_0 = \langle\, \varphi \mid \ \rangle$ не существует успешного табличного вывода

Построив вывод согласно стратегии из доказательства полноты, получим

- бесконечную ветвь $T_0 \to T_1 \to \dots$, состоящую только из незакрытых таблиц
- интерпретацию $\mathcal{I}$ с **не более чем счётно-бесконечной** предметной областью, в которой выполнимы все таблицы этой ветви — в том числе таблица T_0 ▼

Теорема компактности Мальцева

$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **существует** **<u>конечное</u>** **подмножество** Γ' **множества** Γ**, такое что** $\Gamma' \models \varphi$

Доказательство.

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ таблица $T = \langle\ \Gamma \mid \varphi\ \rangle$ невыполнима (почему?)
$\Leftrightarrow$ существует успешный табличный вывод $\mathfrak{D}$ для T

В выводе $\mathfrak{D}$ обрабатывается правилами вывода и участвует в противоречии лишь <u>конечное</u> множество формул Γ' из Γ (почему?)

Тогда для таблицы $\langle\ \Gamma' \mid \varphi\ \rangle$ также существует успешный табличный вывод (почему?)

Значит, $\Gamma' \models \varphi$ ▼

Автоматическое доказательство теорем

А что получится, если программно реализовать стратегию построения успешного табличного вывода?

Средство **автоматического доказательства теорем**:

First-order theorem prover

Задача прувера — предоставлять доказательство общезначимости формулы (т.е. логический вывод)

Требования, предъявляемые к пруверу:

- корректность: обязательно
- полнота: очень желательно
- эффективность: желательно

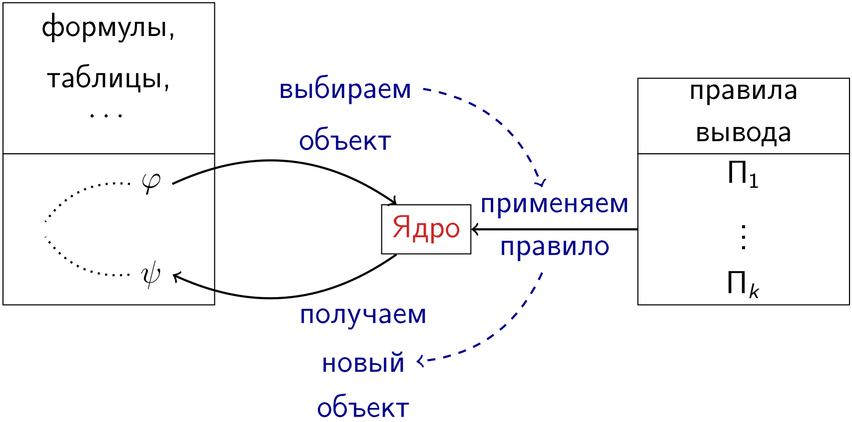
А что-нибудь полезное с помощью пруверов сделано?

Да, например: найдены сотни ошибок и после их исправления строго доказана корректность *nix-микроядра L4[1]

[1] High-order logic theorem prover: Isabelle

Автоматическое доказательство теорем

Как выглядят пруверы:



Автоматическое доказательство теорем: теоретический взгляд. Теорема Чёрча

Насколько эффективным будет корректный и полный прувер, доказывающий общезначимость формул логики предикатов?

Теорема Чёрча

Проблема общезначимости формул логики предикатов алгоритмически неразрешима

Иными словами, никакой алгоритм не способен **достоверно** и **за конечное время** решить проблему "$\models \varphi$?" для **произвольной** формулы φ

Но при этом существует алгоритм, способный подтвердить общезначимость формулы (например, метод семантических таблиц с полной стратегией построения успешного вывода)

Значит, проблема "$\models \varphi$?" полуразрешима, или

частично разрешима

Автоматическое доказательство теорем: теоретический взгляд

Как доказать неразрешимость проблемы “$\models \varphi$?”?

Например, взять другую неразрешимую проблему и **свести** её к “$\models \varphi$?”

Проблема останова машин Тьюринга
Дано: машина Тьюринга M, слово w
Вопрос $\mathbf{HALT}(M, w)$: остановится ли M на входном слове w?

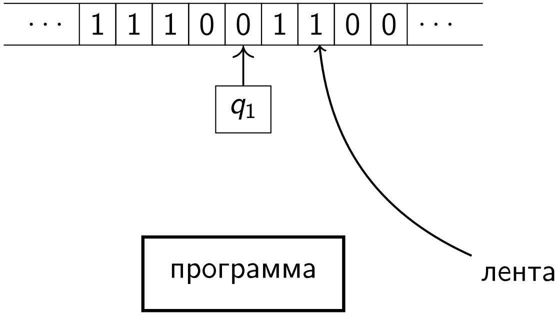
Что такое “свести”?

Предложить алгоритм, по M и w строящий формулу $\varphi_{M,w}$:

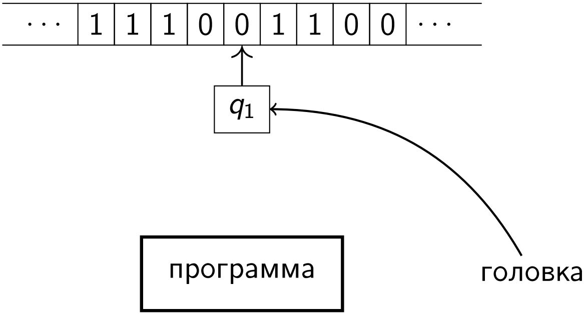
$$\mathbf{HALT}(M, w) \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \varphi_{M,w}$$

Перед тем как описать такой алгоритм, напомним, как выглядят **машины Тьюринга**

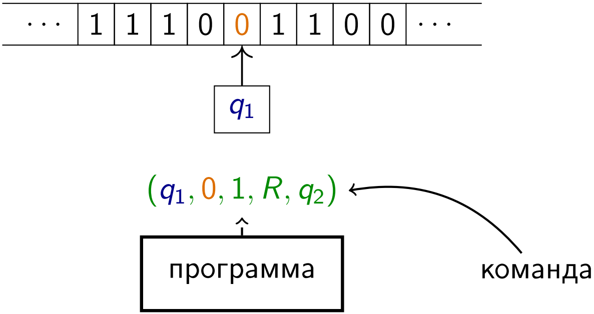
Машины Тьюринга (МТ)



Машины Тьюринга (МТ)



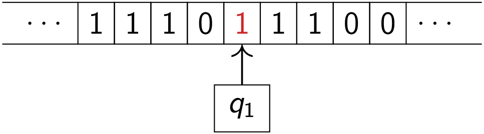
Машины Тьюринга (МТ)



Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду

Машины Тьюринга (МТ)



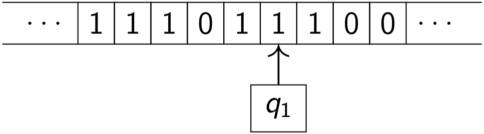
$$(q_1, 0, 1, R, q_2)$$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- записываем в ячейку новый символ

Машины Тьюринга (МТ)



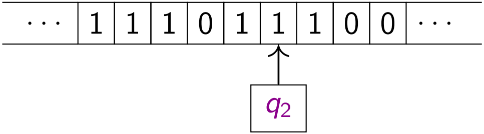
$$(q_1, 0, 1, R, q_2)$$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- записываем в ячейку новый символ
- сдвигаем головку

Машины Тьюринга (МТ)



$$(q_1, 0, 1, R, q_2)$$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- записываем в ячейку новый символ
- сдвигаем головку
- меняем состояние

Машины Тьюринга (МТ)

Теперь всё с начала, по порядку и строго

$\mathcal{A}$ — конечный ленточный алфавит, Λ — пустой символ $(\Lambda \in \mathcal{A})$

Ленточное слово — это слово в алфавите $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}^*$ — множество всех конечных ленточных слов

$\mathcal{Q}$ — конечный алфавит состояний, q_0 — начальное состояние $(q_0 \in \mathcal{Q})$

Ленточная конфигурация — это слово вида $u\ q\ x\ v$ $(q \in \mathcal{Q},\ x \in \mathcal{A},\ u, v \in \mathcal{A}^*)$

Пояснение: $(u = u_1 \ldots u_l,\ v = v_1 \ldots v_s)$

$\cdots$	Λ	$\cdots$	Λ	u_1	$\cdots$	u_l	x	v_1	$\cdots$	v_s	Λ	$\cdots$	Λ	$\cdots$

$\uparrow$

$\boxed{q}$

Машины Тьюринга (МТ)

Команда — это пятёрка вида (q, a, b, D, q')

$(q, q' \in \mathcal{Q},\ a, b \in \mathcal{A},\ D \in \{L, R\})$

Пояснение: из состояния q, обозревая символ a, записать в ячейку b, сдвинуться влево $(D = L)$ или вправо $(D = R)$ и перейти в состояние q'

Командой C задаётся бинарное отношение переходов $\to_C$ на множестве конфигураций: $(z \in \mathcal{A})$

- $u\ z\ q\ x\ v \to_{(q,x,y,L,q')} u\ q'\ z\ y\ v$
- $q\ x\ v \to_{(q,x,y,L,q')} q'\ \Lambda\ y\ v$
- $u\ q\ x\ z\ v \to_{(q,x,y,R,q')} u\ y\ q'\ z\ v$
- $u\ q\ x \to_{(q,x,y,R,q')} u\ y\ q'\ \Lambda$

Машины Тьюринга (МТ)

Машина Тьюринга — это конечное множество команд

Детерминированная МТ: для любых $q \in \mathcal{Q}$, $a \in \mathcal{A}$ **не более чем одна** команда имеет вид (q, a, b, D, q')

Будем рассматривать **только** детерминированные МТ

Отношение переходов, задаваемое МТ M на множестве ленточных конфигураций, определяется так:

$$\rightarrow_M = \bigcup_{C \in M} \rightarrow_C$$

α — заключительная конфигурация МТ M, если не существует конфигурации β, такой что $\alpha \rightarrow_M \beta$

МТ M останавливается на слове w (**HALT**(M, w)), если какая-либо заключительная конфигурация C_{fin} **достижима** из начальной конфигурации $q_0\, w$:

$$q_0\, w \rightarrow_M \cdots \rightarrow_M C_{fin} \not\rightarrow_M$$

Теорема Чёрча: доказательство

Сведём проблему останова детерминированных МТ
к проблеме общезначимости формул логики предикатов

Опишем, как можно по МТ M и ленточному слову w построить формулу $\varphi_{M,w}$:

$$\mathbf{HALT}(M, w) \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \varphi_{M,w}$$

Что будет записано в формуле:

Если начальная конфигурация достижима и
конфигурация, следующая за достижимой, также достижима,
то достижима некоторая заключительная конфигурация

$$Start \,\&\, Step \to Finish$$

Теорема Чёрча: доказательство

Какие символы понадобятся в формуле:

- константа **a** для каждого $a \in \mathcal{A}$
- константа **q** для каждого $q \in \mathcal{Q}$
- операция конкатенации: $\cdot^{(2)}$

  (*ассоциативная вправо в инфиксной записи*)
- отношение достижимости конфигурации из начальной: $\mathrm{Re}^{(3)}$

Что записать в $\varphi_{M,w}$:

- ленточное слово $a_1 \dots a_p$

$$\widetilde{a_1 \dots a_p} = \mathbf{a_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{a_p}$$

- "конфигурация $u\ q\ v$ достижима" $\qquad ((a_1 \dots a_p)^- = a_p \dots a_1)$

$$\mathrm{Re}(\widetilde{u^-}, \mathbf{q}, \widetilde{v})$$

Теорема Чёрча: доказательство

Что записать в $\varphi_{M,w}$:

- "начальная конфигурация достижима"

  $$\mathit{Start}\colon \mathrm{Re}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{q_0}, \widetilde{w})$$

- "если текущая конфигурация достижима, то конфигурация после применения команды C будет достижима"

  - $C = (q, a, b, R, q')$

    $$\varphi_C\colon \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{Re}(\mathrm{x}, \mathbf{q}, \mathbf{a}{\cdot}\mathrm{y}) \to \mathrm{Re}(\mathbf{b}{\cdot}\mathrm{x}, \mathbf{q'}, \mathrm{y}))$$

    $$\psi_C\colon \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{Re}(\mathrm{x}, \mathbf{q}, \mathbf{a}) \to \mathrm{Re}(\mathbf{b}{\cdot}\mathrm{x}, \mathbf{q'}, \mathbf{\Lambda}))$$

  - $C = (q, a, b, L, q')$

    $$\varphi_C\colon \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, (\mathrm{Re}(\mathrm{z}{\cdot}\mathrm{x}, \mathbf{q}, \mathbf{a}{\cdot}\mathrm{y}) \to \mathrm{Re}(\mathrm{x}, \mathbf{q'}, \mathrm{z}{\cdot}\mathbf{b}{\cdot}\mathrm{y}))$$

    $$\psi_C\colon \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, (\mathrm{Re}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{q}, \mathbf{a}{\cdot}\mathrm{y}) \to \mathrm{Re}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{q'}, \mathbf{\Lambda}{\cdot}\mathbf{b}{\cdot}\mathrm{y}))$$

- "конфигурация, следующая за достижимой, также достижима"

  $$\mathit{Step}\colon \mathop{\&}_{C \in M} (\varphi_C \,\&\, \psi_C)$$

Теорема Чёрча: доказательство

Что записать в $\varphi_{M,w}$:

- пусть $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{A}$ — множество пар (q, a), таких что в M нет команд, начинающихся с q, a, но есть команды, содержащие q
- "хотя бы одна заключительная конфигурация достижима"

$$\mathit{Finish}: \exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \Big(\bigvee_{(q,a)\in\mathcal{G}} \mathrm{Re}(\mathrm{x}, \mathbf{q}, \mathbf{a}\cdot \mathrm{y}) \Big)$$

Возвращаемся к тому, что нужно доказать:

HALT(M, w): МТ M останавливается на слове w

$\varphi_{M,w}$: $\mathit{Start}\ \&\ \mathit{Step} \to \mathit{Finish}$

$$\mathbf{HALT}(M, w) \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi_{M,w}$$

Теорема Чёрча: доказательство

$$\mathbf{HALT}(M, w) \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi_{M,w}$$

($\Leftarrow$): если формула $\varphi_{M,w}$ истинна в любой интерпретации, то она истинна и в такой интерпретации $\mathcal{I}$:
$\overline{\mathrm{Re}}(\widetilde{u^-}, \mathbf{q}, \widetilde{v})$ = "конфигурация $u\ q\ v$ достижима из $q_0\ w$ для M"

($\Rightarrow$): предположим, что $\mathbf{HALT}(M, w)$, но $\not\models \varphi_{M,w}$

Тогда существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \not\models \varphi_{M,w}$

$$\mathcal{I} \models \mathit{Start}, \qquad \mathcal{I} \models \mathit{Step}, \qquad \mathcal{I} \not\models \mathit{Finish}$$

Рассмотрим работу M на w:

$$q_0\ w \to_M u_1\ q_1\ v_1 \to_M u_2\ q_2\ v_2 \to_M \cdots \to_M u_k\ q_k\ v_k,$$

где $u_k\ q_k\ v_k$ — заключительная конфигурация

Из $\mathcal{I} \models \mathit{Start}$ и $\mathcal{I} \models \mathit{Step}$ получаем:

$$\mathcal{I} \models \mathrm{Re}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{q_0}, \widetilde{w}),\ \mathcal{I} \models \mathrm{Re}(\widetilde{u_1^-}, \mathbf{q_1}, \widetilde{v_1}),$$
$$\mathcal{I} \models \mathrm{Re}(\widetilde{u_2^-}, \mathbf{q_2}, \widetilde{v_2}),\ \ldots,\ \mathcal{I} \models \mathrm{Re}(\widetilde{u_k^-}, \mathbf{q_k}, \widetilde{v_k})$$

Значит, $\mathcal{I} \models \mathit{Finish}$ (*противоречие*) ▼

Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

Как избежать зацикливания при исследовании общезначимости формулы φ?

В общем случае никак

Но если мы абсолютно уверены, что формула φ общезначима, и хотим предоставить доказательство общезначимости, то это можно сделать

Например, с помощью метода семантических таблиц

А в этом случае будет ли всё работать эффективно?

- К какой формуле применять правило табличного вывода?
- При применении правил $L\forall$, $R\exists$ какие термы подставлять?

Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

Выбор формулы

Как избежать перебора всех формул таблицы?

База знаний	Запрос
В огороде бузина $\text{Растёт}(\textbf{бузина}, \textbf{огород})$	В Киеве дядька $\exists y\ (\text{Дядька}(y)$ $\quad \& \text{ Живёт}(y, \textbf{Киев}))$
Всё в огороде посадил дядька $\forall x\ (\text{Растёт}(x, \textbf{огород}) \to$ $\quad \exists y\ (\text{Посадил}(y, x) \,\&\, \text{Дядька}(y)))$	
Бузину сажают только Киевляне $\forall x\ (\text{Посадил}(x, \textbf{бузина})$ $\quad \to \text{Живёт}(x, \textbf{Киев}))$	

Автоматическое доказательство теорем: практический взгляд

Выбор терма

$$L\forall\ \frac{\langle \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}),\ \varphi(\mathtt{x})\{\mathtt{x}/t\} | \Delta \rangle} \qquad R\exists\ \frac{\langle \Gamma | \Delta,\ \exists \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta,\ \exists \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}),\ \varphi(\mathtt{x})\{\mathtt{x}/t\} \rangle}$$

Насколько разумно перебирать все использованные термы?

Из **одного** функционального символа $\mathbf{f}^{(2)}$ и **двух** констант c_1, c_2 можно построить более 10^{300} термов высоты 10

А это много?

Гугол — это 10^{100},

и это больше числа атомов в наблюдаемой вселенной

Можно ли как-то сократить перебор термов?

В некоторой степени — да, можно[1,2]

---

[1] J.A. Robinson: метод резолюций

[2] С.Ю. Маслов: обратный вывод

Конец лекции 5