Математическая логика и логическое программирование

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail: **valdus@yandex.ru**

2015, весенний семестр

Лекция 5

Полнота табличного вывода

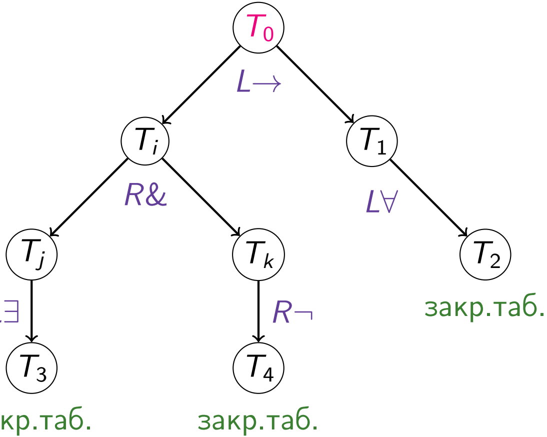
Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема компактности Мальцева

Автоматическое доказательство теорем

Полнота табличного вывода

Есть успешный табличный вывод:



Есть корректность табличного вывода:

если успешный табличный вывод построен, то исходная семантическая таблица невыполнима

Полнота табличного вывода

Верно ли обратное утверждение?

Если семантическая таблица невыполнима, то для неё можно построить успешный табличный вывод

Иначе говоря:

Можно ли проверить общезначимость любой формулы (и в целом невыполнимость любой таблицы), используя только метод семантических таблиц?

Это и есть полнота

Полнота табличного вывода

Теорема полноты табличного вывода

Если семантическая таблица T_0 невыполнима, то для неё существует успешный табличный вывод

Доказательство.

Для простоты считаем, что:

- T_0 содержит лишь конечное число формул
- все формулы T_0 замкнуты
- в формулах T_0 нет функциональных символов

Пусть $T_0 = \langle\, \Gamma_0 \mid \Delta_0 \,\rangle$ — невыполнимая таблица

Будем строить табличный вывод для T_0 по следующей стратегии

Полнота табличного вывода

Доказательство.

1. Незакрытые неатомарные таблицы обрабатываются в порядке их появления в выводе.

Полнота табличного вывода

Доказательство.

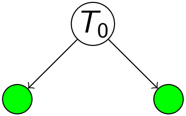
1. Незакрытые неатомарные таблицы обрабатываются в порядке их появления в выводе.

$$T_0$$

Полнота табличного вывода

Доказательство.

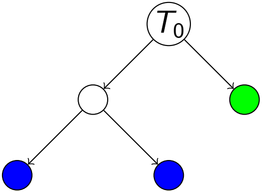
1. Незакрытые неатомарные таблицы обрабатываются в порядке их появления в выводе.



Полнота табличного вывода

Доказательство.

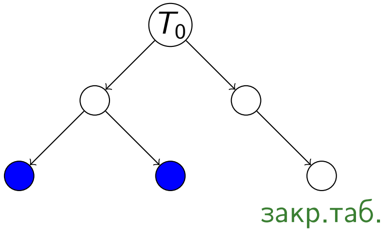
1. Незакрытые неатомарные таблицы обрабатываются в порядке их появления в выводе.



Полнота табличного вывода

Доказательство.

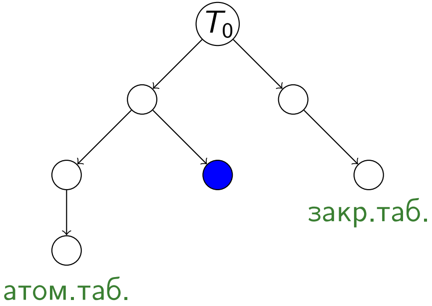
1. Незакрытые неатомарные таблицы обрабатываются в порядке их появления в выводе.



Полнота табличного вывода

Доказательство.

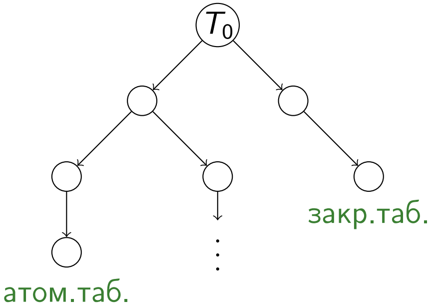
1. Незакрытые неатомарные таблицы обрабатываются в порядке их появления в выводе.



Полнота табличного вывода

Доказательство.

1. Незакрытые неатомарные таблицы обрабатываются в порядке их появления в выводе.



Полнота табличного вывода

Доказательство.

2. Неатомарные формулы в обеих частях таблицы упорядочены. Правило вывода применяется поочерёдно к первым формулам в левой и в правой частях таблицы, результат применения записывается в конец.

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& \langle\, \forall x\, \varphi,\ \psi_1 \to \psi_2,\ \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2,\ \Delta \,\rangle \arrow[d, "L\forall"] & \\
& \langle\, \psi_1 \to \psi_2,\ \Gamma,\ \forall x\, \varphi,\ \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2,\ \Delta \,\rangle \arrow[d, "R\vee"] & \\
& \langle\, \psi_1 \to \psi_2,\ \Gamma,\ \forall x\, \varphi,\ \varphi' \mid \Delta,\ \chi_1,\ \chi_2 \,\rangle \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "L\to"] & \\
\langle\, \Gamma,\ \forall x\, \varphi,\ \varphi',\ \psi_2 \mid \Delta,\ \chi_1,\ \chi_2 \,\rangle & & \langle\, \Gamma,\ \forall x\, \varphi,\ \varphi' \mid \Delta,\ \chi_1,\ \chi_2,\ \psi_1 \,\rangle
\end{tikzcd}$$

$$\ldots$$

Полнота табличного вывода

Доказательство.

3. С каждой таблицей связано непустое множество использованных констант. Для исходной таблицы T_0 это либо все константы формул T_0, либо (если в формулах T_0 нет констант) множество $\{c\}$. При использовании правил $(L\exists)$, $(R\forall)$ в L_i добавляется "свежая" константа. Иначе множество не меняется.

$$\langle\ \exists x\, \varphi(x),\ \psi_1 \to \psi_2,\ \Gamma \mid \forall x\, \chi(x),\ \Delta\ \rangle, \qquad \{c', c''\}$$

$$\big\downarrow L\exists$$

$$\langle\ \psi_1 \to \psi_2,\ \Gamma,\ \varphi(c_1) \mid \forall x\, \chi(x),\ \Delta\ \rangle, \qquad \{c', c'', c_1\}$$

$$\big\downarrow R\forall$$

$$\langle\ \psi_1 \to \psi_2,\ \Gamma,\ \varphi(c_1) \mid \Delta,\ \chi(c_2)\ \rangle, \qquad \{c', c'', c_1, c_2\}$$

$$\swarrow\quad L\to \quad\searrow$$

$$\langle\ \Gamma,\ \varphi(c_1),\ \psi_2 \mid \Delta,\ \chi(c_2)\ \rangle, \quad \{c', c'', c_1, c_2\} \qquad\qquad \langle\ \Gamma,\ \varphi(c_1) \mid \Delta,\ \chi(c_2),\ \psi_1\ \rangle, \quad \{c', c'', c_1, c_2\}$$

$$\dots$$

Полнота табличного вывода

Доказательство.

4. При применении правил $(L\forall)$, $(R\exists)$ подставляются <u>все</u> текущие использованные константы.

$$\langle\ \forall x\ \varphi(x),\ \Gamma \mid \exists x\ \psi(x),\ \Delta\ \rangle, \quad \{c_1, c_2\}$$

$$\Big\downarrow L\forall \times 2$$

$$\langle\ \Gamma,\ \forall x\ \varphi(x),\ \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists x\ \psi(x),\ \Delta\ \rangle, \quad \{c_1, c_2\}$$

$$\Big\downarrow R\exists \times 2$$

$$\langle\ \Gamma,\ \forall x\ \varphi(x),\ \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \Delta,\ \exists x\ \psi(x),\ \psi(c_1),\ \psi(c_2)\ \rangle, \quad \{c_1, c_2\}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\ldots$$

Полнота табличного вывода

Доказательство.

Осталось показать, что вывод для невыполнимой таблицы $T_0 = \langle\, \Gamma_0 \mid \Delta_0 \,\rangle$, построенный по предложенной стратегии, обязательно будет успешным

Предположим, что это не так: построенный для T_0 табличный вывод оказался неуспешным

Заменим каждую незакрытую атомарную таблицу T_{atom} на бесконечную ветвь $T_{atom} \to T_{atom} \to T_{atom} \to \dots$

Тогда в дереве вывода обязательно найдётся бесконечная ветвь

$$T_0 \to T_1 \to T_2 \to \dots ,$$

состоящая только из незакрытых таблиц

По этой ветви построим интерпретацию I, в которой выполнимы все формулы Γ_0 и невыполнимы все формулы Δ_0

Полнота табличного вывода

Доказательство

Рассмотрим эту бесконечную ветвь

$T_0 \to T_1 \to T_2 \to \dots \qquad (T_i = \langle\, \Gamma_i \mid \Delta_i \,\rangle)$

Рассмотрим три множества:

1. $\Gamma_\omega = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$ — все формулы левых частей таблиц ветви
2. $\Delta_\omega = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Delta_i$ — все формулы правых частей таблиц ветви
3. $L_\omega = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} L_i$ — все константы, использованные в таблицах ветви

Полнота табличного вывода

Доказательство.

Интерпретацию I зададим так:

$$I = \langle D, \overline{Const}, \overline{Pred} \rangle$$

- предметная область — все символы констант, использованные в таблицах ветви:
$$D = L_\omega$$
- значением каждой константы является её изображение:
$$\overline{c} = c$$
- значение предиката определяется тем, есть ли он в левых частях таблиц ветви:
$$\overline{P}(c_1, \ldots, c_k) = true \qquad \Leftrightarrow \qquad P(c_1, \ldots, c_k) \in \Gamma_\omega$$

Теперь достаточно показать, что

- любая формула из Γ_ω выполнима в I и
- любая формула из Δ_ω невыполнима в I

Докажем это индукцией по числу логических операций (связок, кванторов)

Полнота табличного вывода

Доказательство.

База индукции.

Рассмотрим атомарную формулу φ, содержащуюся в таблицах рассматриваемой ветви

Она имеет вид $P(c_1, \dots, c_k)$, где $c_1, \dots, c_k \in Const$ (почему?)

Если $\varphi \in \Gamma_\omega$, то $\overline{P}(c_1, \dots, c_k) = true$, а значит, $I \models \varphi$

Если $\varphi \in \Delta_\omega$, то $\varphi \notin \Gamma_\omega$, (почему?)
а значит, $\overline{P}(c_1, \dots, c_k) = false$ и $I \not\models \varphi$

Полнота табличного вывода

Доказательство.

Индуктивный переход.

Пусть утверждение верно для формул, содержащих не более N логических операций

Покажем справедливость для формул, содержащих $(N+1)$ логическую операцию

Начнем с импликации: $\varphi \to \psi \in \Gamma_\omega$

В рассматриваемой ветви существует таблица T_i, такая что правило вывода применяется к $\varphi \to \psi$ в левой части (почему?)

Тогда или $\psi \in \Gamma_{i+1}$, или $\varphi \in \Delta_{i+1}$

По индуктивному предположению имеем

- $I \models \psi$ в первом случае
- $I \not\models \varphi$ во втором случае

В обоих случаях $I \models \varphi \to \psi$

Полнота табличного вывода

Доказательство.

Индуктивный переход.

Аналогичные рассуждения проводятся для остальных логических связок и для случая $(\dots \in \Delta_\omega)$

Полнота табличного вывода

Доказательство.

Индуктивный переход.

Ещё один случай: $\forall x \; \varphi(x) \in \Gamma_\omega$

Тогда к формуле $\forall x \; \varphi(X)$ бесконечно часто применяется правило $(L\forall)$ в рассматриваемой ветви (почему?)

Тогда для любой константы c формула $\varphi(c)$ встречается в левой части какой-либо таблицы ветви, то есть $\varphi(c) \in \Gamma_\omega$

Итого: для любой константы $c \in L_\omega$ верно $I \models \varphi(c)$

Так как L_ω — предметная область I, немедленно получаем $I \models \forall x \; \varphi(x)$

Полнота табличного вывода

Доказательство.

Индуктивный переход.

И последний случай: $\forall x\, \varphi(x) \in \Delta_\omega$

Тогда к $\forall x\, \varphi(x)$ рано или поздно применится правило $(R\forall)$ в рассматриваемой ветви: пусть это $T_i \xrightarrow{(R\forall)} T_{i+1}$

Тогда $\varphi(c) \in \Delta_{i+1}$ для некоторой константы c, $c \in L_{i+1} \subseteq L_\omega$

Тогда $I \not\models \varphi(c)$

А значит, $I \not\models \forall x\, \varphi(x)$

(остальные случаи аналогичны рассмотренным)

Полнота табличного вывода

Доказательство.

Что имеется после всех предложенных рассуждений:

- все формулы из Γ_ω выполнимы в I
- все формулы из Δ_ω невыполнимы в I

Кроме того, вспоминаем про исходную таблицу $T_0 = \langle\, \Gamma_0 \mid \Delta_0 \,\rangle$

По определению имеем $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_\omega$, $\Delta_0 \subseteq \Delta_\omega$

А значит, $I \models \Gamma_0$ и $I \not\models \Delta_0$

Теперь вспомним условие: **таблица** T_0 **невыполнима**

Получили противоречие, доказывающее теорему

конец доказательства

Полнота табличного вывода

В начале доказательства мы условились рассмотреть несколько упрощений. А насколько эти упрощения существенны? Иначе говоря:

- как нужно представлять и обрабатывать таблицы, чтобы можно было совладать с бесконечными множествами формул?
- какие изменения нужно внести в стратегию построения вывода, если в формулах разрешено использовать произвольные термы?
- как определить интерпретацию I, если в таблицах встречаются незамкнутые формулы?

Полнота табличного вывода

Теорема Гёделя о полноте

Если формула φ общезначима, то существует успешный табличный вывод для таблицы $T_\varphi = \langle\ \mid \varphi\ \rangle$

Доказательство. Следует из полноты табличного вывода

Итого:

Формула φ общезначима

$$\Leftrightarrow$$

Для таблицы T_φ существует успешный вывод

И в доказательстве теоремы полноты сказано, **<u>как</u>** построить этот вывод

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Формула φ выполнима $\quad\Leftrightarrow\quad$ φ имеет модель с конечной или счётно-бесконечной предметной областью

Доказательство.

Пусть формула φ выполнима. Рассмотрим таблицу $T_0 = \langle\, \varphi \mid \;\rangle$
Корректность табличного вывода: не существует успешного табличного вывода для T_0. Действуя как в доказательстве полноты табличного вывода, получим:

- бесконечную ветвь $T_0 \to T_1 \to T_2 \to \dots$, не содержащую закрытых таблиц
- интерпретацию I с не более чем счётно-бесконечной предметной областью $\{c_1, c_2, \dots\}$, состоящей из использованных в таблицах ветви констант
- выполнимость всех таблиц T_i, в том числе таблицы T_0

конец доказательства

Теорема компактности Мальцева

$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **существует <u>конечное</u> подмножество Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \models \varphi$**

Доказательство.

$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ таблица $\langle\ \Gamma \mid \varphi\ \rangle$ невыполнима (почему?)
$\Leftrightarrow \quad$ существует успешный табличный вывод для $\langle\ \Gamma \mid \varphi\ \rangle$

Тогда найдётся лишь <u>конечное</u> число формул Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что либо к ним применяются правила вывода, либо они образуют противоречие в закрытой таблице (почему?)

Тогда для $\langle\ \Gamma' \mid \varphi\ \rangle$ существует успешный табличный вывод (с той же структурой)

А значит, $\Gamma' \models \varphi$

<u>**конец доказательства**</u>

Автоматическое доказательство теорем

Что ещё можно извлечь из стратегии построения вывода в доказательстве теоремы полноты?

Автоматическое доказательство теорем

Средство, которое это делает, обычно называется прувером (точнее, Theorem prover for first-order logic
или First-order theorem prover)

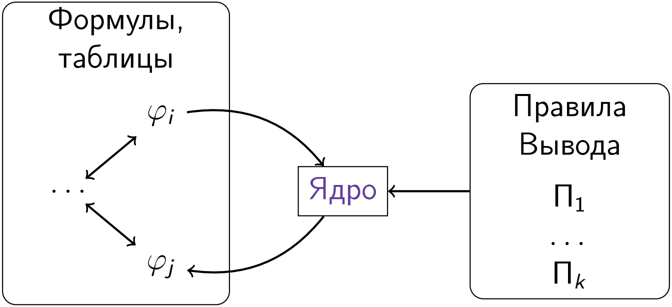
Прувер строит логический вывод (доказательство) для заданной формулы

Обычно от пруверов требуются:

- корректность — **обязательно**
- полнота — **очень желательно**
- эффективность — **желательно**

Автоматическое доказательство теорем

Как выглядит прувер?



Автоматическое доказательство теорем

Табличный вывод тоже может лежать в основе прувера

Но насколько такой прувер будет эффективным?

Где скрыта сложность в применении табличного вывода?

- Выбор формулы, к которой применяется правило
- Выбор терма, подставляемого при применении правил $(L\forall)$, $R(\exists)$

Автоматическое доказательство теорем

Выбор формулы

Как избежать перебора всех формул таблицы?

База знаний	Запрос
В огороде бузина Растёт(бузина, огород)	В Киеве дядька $\exists y$ (Дядька(y) & Живёт(y, Киев))
Всё в огороде посадил дядька $\forall x$ (Растёт(x, огород) $\to$ $\exists y$ (Посадил(y, x) & Дядька(y)))	
Бузину сажают только Киевляне $\forall x$ (Посадил(x, бузина) $\to$ Живёт(x, Киев))	

Автоматическое доказательство теорем

Выбор терма

Есть правила:

$$L\forall \quad \frac{\langle\ \Gamma,\ \forall x\varphi(x)\ |\ \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \forall x\varphi(x),\ \varphi(x)\ \{x/t\}\ |\ \Delta\ \rangle}$$

$$R\exists \quad \frac{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \exists x\varphi(x)\ \rangle}{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \exists x\varphi(x),\ \varphi(x)\ \{x/t\}\ \rangle}$$

Насколько разумно перебирать все использованные термы?

Если есть только один функциональный символ $f^{(2)}$ и две константы c_1, c_2, то основных термов высоты 10 — порядка 10^{1000}

А с Большого Взрыва прошло всего порядка 10^{18} секунд — или 10^{60} квантов времени

А число "гугол" — это 10^{100}

Можно ли как-то сократить перебор термов?

В некоторой степени — да, можно

(J.A. Robinson: метод резолюций;

С.Ю. Маслов: обратный вывод)

Конец лекции 5