

# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

## Блок 1

Вступление:

Что такое логика

Несколько логических парадоксов

Чего ожидать в лекциях

Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

# Что такое логика

**Логика**<sup>1</sup> — это наука об общезначимых формах и средствах мысли, необходимых для рационального познания в любой области знания

**Логика**<sup>2</sup> — это нормативная наука о формах и приёмах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка

**Логика**<sup>3</sup> — это наука, которая изучает, каким образом мы выражаем мысли, делаем умозаклучения, и как всё это можно представить формально

**Логика**<sup>4</sup> — это наука о правильных способах рассуждения, то есть таких, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты

---

1 Философский энциклопедический словарь.

2 Бочаров, Маркин. Основы логики.

3 Метакидес, Нероуд. Принципы логики и логического программирования.

4 Успенский, Верещагин, Плиско. Вводный курс математической логики.

# Что такое логика

**Формальная логика**<sup>1</sup> — это наука о законах знания, полученного из ранее установленных и проверенных истин, без обращения в каждом конкретном случае к опыту, а только в результате применения законов и правил мышления

**Формальная логика**<sup>2</sup> — сейчас это синоним логики

**Математическая логика**<sup>3</sup> — это

- 1) логика, развиваемая с помощью математических методов,
- 2) логика, используемая в математике

**Математическая логика**<sup>4</sup> — это раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики

---

1 Кондаков. Логический словарь-справочник.

2 Философский энциклопедический словарь.

3 Клини. Математическая логика.

4 Математическая энциклопедия.

# Что такое логика

**Формальная математическая логика** изучает

- ▶ **законы** причинно-следственной связи в окружающем мире
- ▶ проявление этих законов в рациональном мышлении человека
- ▶ отражение этих законов в **языках**,
  - ▶ как естественных,
  - ▶ так и искусственных
- ▶ **формы**, в которых проявляются эти законы, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся

# Что такое логика

Например:

Из того, что  
    **все люди смертны**  
и  
    **Сократ — человек**  
следует, что  
    **Сократ смертен**

Из того, что  
    **у змей нет лап**  
и  
    **уж — змея**  
следует, что  
    **у ужа нет лап**

Из того, что  
    **каждый металл — проводник**  
и  
    **ртуть — металл**  
следует, что  
    **ртуть — проводник**

Эти высказывания относятся к совершенно разным областям и имеют совершенно разный смысл, но в целом одинаковую **форму**

# Что такое логика

## Например:

Вот эта форма:

Из того, что

**каждый предмет, обладающий свойством  $A$   
обладает и свойством  $B$**

и

**предмет  $c$  обладает свойством  $A$**

следует, что

**предмет  $c$  обладает свойством  $B$**

Это один из **законов** логики, не зависящий от смысла  $A$ ,  $B$  и  $c$

Подходящим способом **интерпретируя**  $A$ ,  $B$  и  $c$  в этом законе,  
можно получить из него упомянутые высказывания и многие другие

При этом сам закон не зависит от выбранной интерпретации

# Что такое логика

Законами логики задаются универсальные способы преобразования информации из одной формы в другую

Например:

«У змей нет лап, и уж — змея»

Упомянутый закон логики позволяет извлечь информацию, «скрытую» в этой фразе (форме), и представить её в другой форме:

«У ужа нет лап»

Следует иметь в виду, что при помощи законов логики **нельзя** получить новую информацию, а **можно** только преобразовать форму имеющейся информации

Иллюстрация того, насколько полезным может быть умение изменять форму информации:

« $x$  — наибольший простой делитель числа 23 082 745 709»

и

« $x = 3221$ » —

это две формы задания одного и того же числа  $x$

# Стоит ли уделять этому столько внимания?

Логика скрыта в основе многих явлений, процессов и задач, связанных с языком, рациональным познанием и умозаклучениями

В лекциях — там, где это будет наиболее наглядно — иногда будут приводиться общие рассуждения и конкретные примеры по этому поводу

Но уже сейчас можно задуматься о простых для восприятия проблемах, с которыми непросто справиться

без должных знаний из области логики:

**логических парадоксах**



# Несколько логических парадоксов

## Парадокс лжеца

*(думаю, что все знают этот парадокс; а кто не знает — запоминайте)*

**Это утверждение ложно**

Ложно ли утверждение выше?

# Несколько логических парадоксов

## Парадокс Рассела

*(а этот парадокс должны знать все математики)*

Пусть  $\Omega$  — множество всех множеств,  
не содержащих себя в качестве элемента:

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \notin \omega\}$$

Верно ли соотношение  $\Omega \in \Omega$ ?

# Несколько логических парадоксов

## Парадокс утренней звезды

Венера видна **ранним утром**,  
и поэтому её называют «**утренней звездой**»

Венера видна **поздним вечером**,  
и поэтому её называют «**вечерней звездой**»

Означает ли это, что **утренняя звезда**  
**видна поздним вечером?**

# Несколько логических парадоксов

## Парадокс лысого

(он же «парадокс кучи»)

Если у человека нет ни одного волоса, то он лыс

Если у лысого вырастет ещё один волосок, то он останется лысым

Значит, все люди лысые?

# Несколько логических парадоксов

## Парадокс пьяницы

**Теорема.** Все, кто здесь присутствует, пьют.

**Доказательство.**

Здесь присутствует человек, такой что если он пьёт, то все пьют. (\*)

Я пью.

Значит, все пьют. ▼

**Лемма.** (\*)

**Доказательство.**

Если все в этой комнате пьют,  
то этот человек — любой из присутствующих (например, я).

Иначе один из присутствующих (**x**) — непьющий.

Пусть **A** — утверждение «**x** пьёт», и **B** — утверждение «все пьют».

Утверждение **A** ложно, а значит, утверждение «если **A**, то **B**» истинно. ▼

Где скрыта ошибка, и почему это ошибка?

# Несколько логических парадоксов

## Парадокс морской битвы

Флотоводец обратился к прорицателю с вопросом, состоится ли завтра морская битва.

Прорицатель ответил: «Битва завтра состоится».

На следующий день случился шторм, и флот не смог выйти в море. Разгневанный флотоводец потребовал от прорицателя вернуть деньги, поскольку его прогноз оказался ложным.

Прорицатель ответил:

«Твои моряки вчера купили на рынке свежее молоко.

Сегодня это молоко уже не свежее, но они не просят вернуть им деньги обратно.

Мой прогноз тоже был верным вчера, и ты не вправе жаловаться на то, что он неверен сегодня».

Прав ли прорицатель?

# Парадоксы неизбежны, но их влияние можно ограничить

Чтобы это ограничение было возможно и неоспоримо,  
необходимо научиться

- ▶ анализировать форму и смысл высказываний,  
составляющих парадокс, и, более того
- ▶ делать это со всей (математической) строгостью

Для этого (*как и для многого другого*) и предназначена

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

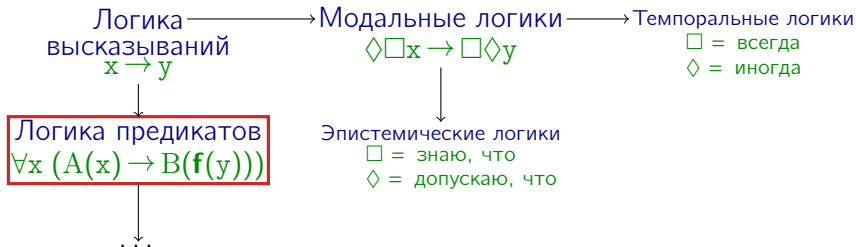
# Чего ожидать в курсе

Использование логики, как правило, начинается с выбора **языка** записи интересующих высказываний

Таких языков существует великое множество, в зависимости от выбранного класса высказываний и целевых средств их анализа

В математической логике обычно используются искусственные **формальные языки** (языки формул)

В курсе встретятся следующие разделы логики с соответствующими формальными языками:





# Чего ожидать в курсе

Основная задача логики, вокруг которой строится практически весь курс лекций — это задача проверки логического следования:

**Правда ли, что высказывание  $A$   
обязательно следует из совокупности высказываний  $\Gamma$ ?**  
 $\Gamma \models A?$

Эта задача возникает во многих областях разумной деятельности — например:

- ▶ **Экспертные системы:**
  - ▶  $\Gamma$  — база знаний,  $A$  — запрос,
  - ▶ аппарат применения логических законов — ядро системы
- ▶ **Доказательство теорем, ручное и автоматизированное:**
  - ▶  $\Gamma$  — аксиомы, леммы и т.п.,  $A$  — формулировка теоремы
  - ▶ аппарат применения логических законов — ядро средства

# Чего ожидать в курсе

Отдельно будет показано, что проверка логического следования — это практически то же самое, что и проверка общезначимости (тождественной истинности):

**Правда ли, что высказывание  $A$  — абсолютная истина?**

$\models A?$

В курсе будут обсуждаться три известных логических метода проверки общезначимости формул, каждый из которых по-своему раскрывает некоторые разделы и особенности устройства логики:

- ▶ **метод семантических таблиц**,  
универсальный и идеологически простой
- ▶ **метод резолюций**,  
специальный для логики предикатов и эффективный
- ▶ **натуральный вывод**,  
имитирующий построение  
«привычных» математических доказательств