

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 1

Вступление:

Что такое логика

Несколько логических парадоксов

Чего ожидать в лекциях

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Что такое логика

Логика¹ — это наука об общезначимых формах и средствах мысли, необходимых для рационального познания в любой области знания

Логика² — это нормативная наука о формах и приёмах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляющейся с помощью языка

Логика³ — это наука, которая изучает, каким образом мы выражаем мысли, делаем умозаключения, и как всё это можно представить формально

Логика⁴ — это наука о правильных способах рассуждения, то есть таких, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты

1 Философский энциклопедический словарь.

2 Бочаров, Маркин. Основы логики.

3 Метакидес, Нероуд. Принципы логики и логического программирования.

4 Успенский, Верещагин, Плиско. Вводный курс математической логики.

Что такое логика

Формальная логика¹ — это наука о законах знания, полученного из ранее установленных и проверенных истин, без обращения в каждом конкретном случае к опыту, а только в результате применения законов и правил мышления

Формальная логика² — сейчас это синоним логики

Математическая логика³ — это

- 1) логика, развивающаяся с помощью математических методов,
- 2) логика, используемая в математике

Математическая логика⁴ — это раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики

1 Кондаков. Логический словарь-справочник.

2 Философский энциклопедический словарь.

3 Клини. Математическая логика.

4 Математическая энциклопедия.

Что такое логика

Формальная математическая логика изучает

- ▶ законы причинно-следственной связи в окружающем мире
- ▶ проявление этих законов в рациональном мышлении человека
- ▶ отражение этих законов в **языках**,
 - ▶ как естественных,
 - ▶ так и искусственных
- ▶ **формы**, в которых проявляются эти законы, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся

Что такое логика

Например:

Из того, что
все люди смертны
и
Сократ — человек
следует, что
Сократ смертен

Из того, что
у змей нет лап
и
уж — змея
следует, что
у ужа нет лап

Из того, что
каждый металл — проводник
и
ртуть — металл
следует, что
ртуть — проводник

Эти высказывания относятся к совершенно разным областям
и имеют совершенно разный смысл, но в целом одинаковую **форму**

Что такое логика

Например:

Вот эта **форма**:

Из того, что

**каждый предмет, обладающий свойством А
обладает и свойством В**

и

предмет с обладает свойством А

следует, что

предмет с обладает свойством В

Это один из **законов** логики, не зависящий от смысла А, В и с

Подходящим способом **интерпретируя** А, В и с в этом законе,
можно получить из него упомянутые высказывания и многие другие

При этом сам закон не зависит от выбранной интерпретации

Что такое логика

Законами логики задаются универсальные способы преобразования **информации** из одной формы в другую

Например:

«У змей нет лап, и уж — змея»

Упомянутый закон логики позволяет извлечь информацию, «скрытую» в этой фразе (форме), и представить её в другой форме:

«У ужа нет лап»

Следует иметь в виду, что при помощи законов логики **нельзя** получить новую информацию, а **можно** только преобразовать форму имеющейся информации

Иллюстрация того, насколько полезным может быть умение изменять форму информации:

« x — наибольший простой делитель числа 23 082 745 709»

и

« $x = 3221$ » —

это две формы задания одного и того же числа x

Стойт ли уделять этому столько внимания?

Логика скрыта в основе многих явлений, процессов и задач, связанных с языком, рациональным познанием и умозаключениями

В лекциях — там, где это будет наиболее наглядно — иногда будут приводиться общие рассуждения и конкретные примеры по этому поводу

Но уже сейчас можно задуматься о простых для восприятия проблемах, с которыми непросто справиться
без должных знаний из области логики:

логических парадоксах

Несколько логических парадоксов

Парадокс лжеца

(думаю, что все знают этот парадокс; а кто не знает — запоминайте)

Это утверждение ложно

Ложно ли утверждение выше?

Несколько логических парадоксов

Парадокс Рассела

(а этот парадокс должны знать все математики)

Пусть Ω — множество всех множеств,
не содержащих себя в качестве элемента:

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \notin \omega\}$$

Верно ли соотношение $\Omega \in \Omega$?

Несколько логических парадоксов

Парадокс утренней звезды

Венера видна **ранним утром**,
и поэтому её называют «**утренней звездой**»

Венера видна **поздним вечером**,
и поэтому её называют «**вечерней звездой**»

Означает ли это, что **утренняя звезда**
видна поздним вечером?

Несколько логических парадоксов

Парадокс лысого

(он же «парадокс кучи»)

Если у человека нет ни одного волоса, то он лыс

Если у лысого вырастет ещё один волосок, то он останется лысым

Значит, все люди лысые?

Несколько логических парадоксов

Парадокс пьяницы

Теорема. Все, кто здесь присутствует, пьют.

Доказательство.

Здесь присутствует человек, такой что если он пьёт, то все пьют. (*)

Я пью.

Значит, все пьют. ▼

Лемма. (*)

Доказательство.

Если все в этой комнате пьют,

то этот человек — любой из присутствующих (например, я).

Иначе один из присутствующих (**x**) — непьющий.

Пусть A — утверждение «**x** пьёт», и B — утверждение «все пьют».

Утверждение A ложно, а значит, утверждение «если A, то B» истинно. ▼

Где скрыта ошибка, и почему это ошибка?

Несколько логических парадоксов

Парадокс морской битвы

Флотоводец обратился к прорицателю с вопросом,
состоится ли завтра морская битва.

Прорицатель ответил: «Битва завтра состоится».

На следующий день случился шторм, и флот не смог выйти в море.
Разгневанный флотоводец потребовал от прорицателя
вернуть деньги, поскольку его прогноз оказался ложным.

Прорицатель ответил:

«Твои моряки вчера купили на рынке свежее молоко.
Сегодня это молоко уже не свежее,
но они не просят вернуть им деньги обратно.
Мой прогноз тоже был верным вчера,
и ты не вправе жаловаться на то, что он неверен сегодня».

Прав ли прорицатель?

Парадоксы неизбежны, но их влияние можно ограничить

Чтобы это ограничение было возможно и неоспоримо,
необходимо научиться

- ▶ анализировать форму и смысл высказываний,
составляющих парадокс, и, более того
- ▶ делать это со всей (математической) строгостью

Для этого (как и для многого другого) и предназначена

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

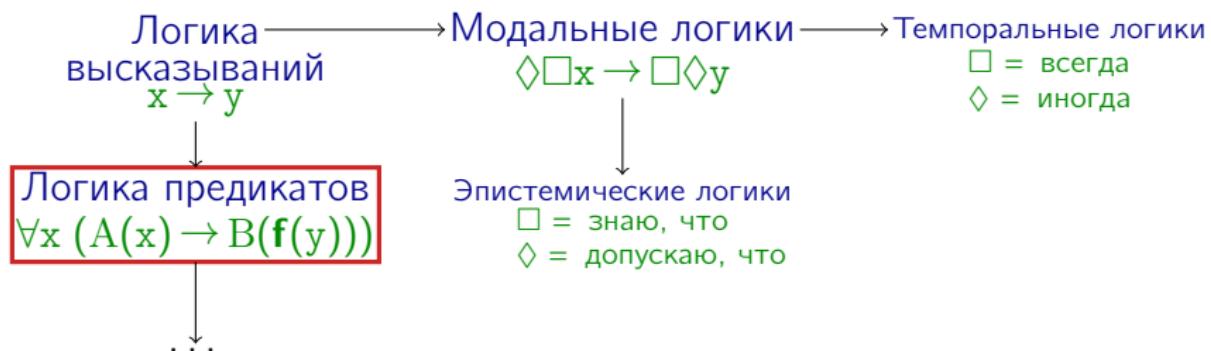
Чего ожидать в курсе

Использование логики, как правило, начинается с выбора языка записи интересующих высказываний

Таких языков существует великое множество, в зависимости от выбранного класса высказываний и целевых средств их анализа

В математической логике обычно используются искусственные **формальные языки** (языки формул)

В курсе встречаются следующие разделы логики с соответствующими формальными языками:



Чего ожидать в курсе

Основная задача логики, вокруг которой строится практически весь курс лекций — это задача проверки логического следования:

**Правда ли, что высказывание A
обязательно следует из совокупности высказываний Г?**

$$\Gamma \models A?$$

Эта задача возникает во многих областях разумной деятельности — например:

- ▶ Экспертные системы:
 - ▶ Г — база знаний, А — запрос,
 - ▶ аппарат применения логических законов — ядро системы
- ▶ Доказательство теорем, ручное и автоматизированное:
 - ▶ Г — аксиомы, леммы и т.п., А — формулировка теоремы
 - ▶ аппарат применения логических законов — ядро средства

Чего ожидать в курсе

Отдельно будет показано, что проверка логического следования — это практически то же самое, что и проверка общезначимости (тождественной истинности):

Правда ли, что высказывание A — абсолютная истина?

$$\models A?$$

В курсе будут обсуждаться три известных логических метода проверки общезначимости формул, каждый из которых по-своему раскрывает некоторые разделы и особенности устройства логики:

- ▶ метод семантических таблиц,
универсальный и идеологически простой
- ▶ метод резолюций,
специальный для логики предикатов и эффективный
- ▶ натуральный вывод,
имитирующий построение
«привычных» математических доказательств