

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 46

Отрицание в логическом программировании  
Допущение замкнутости мира

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

## Пример (ХЛП $\mathcal{P}$ )

птица(**орёл**);

летает(**орёл**);

птица(**пингвин**);

летает(**самолёт**);

Послав подходящий запрос, можно узнать у  $\mathcal{P}$ , какие по её мнению есть летающие птицы:

?птица( $X$ ), летает( $X$ )

На этот запрос есть ровно один правильный (и он же ровно один SLD-вычислимый) ответ: летающая птица — это орёл

{ $X$ /**орёл**}

Если бы в телах можно можно было использовать не только атомы, но и их **отрицания**, то можно было бы естественно записать запрос о **нелетающей** птице:

?птица( $X$ ),  $\neg$ летает( $X$ )

$\neg$  — полезная логическая связка, и хотелось бы её использовать в логических программах

А почему до сих пор было запрещено так использовать  $\neg$ ?

**Пример** (ХЛП  $\mathcal{P}$  и запрос  $\mathcal{Q}$ )

птица(**орёл**);                      летает(**орёл**);  
птица(**пингвин**);                  летает(**самолёт**);  
?птица( $X$ ),  $\neg$ летает( $X$ )

Применив любой известный метод проверки общезначимости формул логики предикатов, можно легко убедиться, что

$$\not\models \text{птица}(\mathbf{орёл}) \ \& \ \text{птица}(\mathbf{пингвин}) \ \& \ \text{летает}(\mathbf{орёл}) \ \& \ \text{летает}(\mathbf{самолёт}) \rightarrow \text{птица}(\mathbf{пингвин}) \ \& \ \neg \text{летает}(\mathbf{пингвин})$$

А значит (по **теореме о логическом следствии**),

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{птица}(\mathbf{орёл}), \text{птица}(\mathbf{пингвин}), \\ \text{летает}(\mathbf{орёл}), \text{летает}(\mathbf{самолёт}) \end{array} \right\} \not\models \text{птица}(\mathbf{пингвин}) \ \& \ \neg \text{летает}(\mathbf{пингвин})$$

То есть программа  $\mathcal{P}$  не считает пингвина нелетающей птицей

И летающей птицей программа  $\mathcal{P}$  пингвина тоже не считает:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{птица}(\mathbf{орёл}), \text{птица}(\mathbf{пингвин}), \\ \text{летает}(\mathbf{орёл}), \text{летает}(\mathbf{самолёт}) \end{array} \right\} \not\models \text{птица}(\mathbf{пингвин}) \ \& \ \text{летает}(\mathbf{пингвин})$$

При этом  $\mathcal{P}$  уверена, что пингвин — это птица:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{птица}(\mathbf{орёл}), \text{птица}(\mathbf{пингвин}), \\ \text{летает}(\mathbf{орёл}), \text{летает}(\mathbf{самолёт}) \end{array} \right\} \models \text{птица}(\mathbf{пингвин})$$

**Всё-таки летает ли пингвин?**

**Пример** (ХЛП  $\mathcal{P}$  и запрос  $\mathcal{Q}$ )

птица(**орёл**);

летает(**орёл**);

птица(**пингвин**);

летает(**самолёт**);

?птица( $X$ ),  $\neg$ летает( $X$ )

У  $\mathcal{P}$  как у системы формул есть модель, в которой утверждается, что пингвин не летает

Значит, **достоверно** заключить, что пингвин летает,  $\mathcal{P}$  не может

Но у  $\mathcal{P}$  есть и модель, в которой утверждается, что пингвин летает

Например, такой моделью  $\mathcal{P}$  является  **$\mathcal{H}$ -интерпретация**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{птица}(\mathbf{орёл}), \text{ птица}(\mathbf{пингвин}), \\ \text{летает}(\mathbf{орёл}), \text{ летает}(\mathbf{самолёт}), \text{ летает}(\mathbf{пингвин}) \end{array} \right\}$$

Значит, **достоверно** заключить, что пингвин не летает,  $\mathcal{P}$  тоже не может

Строго говоря, ответ «пингвин — это нелетающая птица» и должен быть неправильным: если невозможно доказать, что пингвин не летает, то из этого не следует, что пингвин летает

**Пример** (ХЛП  $\mathcal{P}$  и запрос  $\mathcal{Q}$ )

птица(**орёл**);

летает(**орёл**);

птица(**пингвин**);

летает(**самолёт**);

?птица( $X$ ),  $\neg$ летает( $X$ )

Можно заставить программиста **явно** записать факт

$\neg$ летает(**пингвин**)

Но тогда программисту придётся аналогично перечислить всё то, что, согласно его знаниям, не умеет летать (*и это ОЧЕНЬ много фактов*)

Чтобы программист был освобождён от бремени перечисления всего того, чего нет, принято использовать **допущение замкнутости мира** (предположение о замкнутости мира; closed world assumption; **CWA**), имеющее несколько строгих формулировок с таким общим смыслом: **если утверждение невозможно доказать, то оно считается ложным**

**Пример** (ХЛП  $\mathcal{P}$  и запрос  $\mathcal{Q}$ )

птица(**орёл**);                      летает(**орёл**);  
птица(**пингвин**);                  летает(**самолёт**);  
?птица( $X$ ),  $\neg$ летает( $X$ )

Аналогичный принцип (*презумпция невиновности*) используется в суде: обвиняемый не обязан явно опровергать весь спектр гипотетически возможных фактов, которые могли бы доказать его вину, и считается невиновным, если невозможно доказать вину

Если программа  $\mathcal{P}$  (*обвинитель*) не может доказать, что пингвин (*виновен в том, что*) летает, то он не летает (*невиновен*)

В этом смысле ( $\models_{CWA}$ ) пингвин — нелетающая птица:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{птица}(\mathbf{орёл}), \text{ птица}(\mathbf{пингвин}), \\ \text{летает}(\mathbf{орёл}), \text{ летает}(\mathbf{самолёт}) \end{array} \right\} \models_{CWA} \text{птица}(\mathbf{пингвин}) \ \& \ \neg \text{летает}(\mathbf{пингвин})$

Попробуем предоставить хотя бы один вариант строгой корректной формулировки CWA

Моделью хорновской логической программы  $\mathcal{P}$  будем называть модель системы формул  $\Phi_{\mathcal{P}}$

Для семейства  $\mathcal{I}$   $\mathcal{H}$ -интерпретаций записью  $\bigcap \mathcal{I}$  будем обозначать  $\mathcal{H}$ -интерпретацию  $\{A \mid \forall I \in \mathcal{I} : A \in I\}$

**Лемма (о пересечении моделей ХЛП).** Для любой ХЛП  $\mathcal{P}$  и любого семейства  $\mathcal{I}$  её эрбрановских моделей интерпретация  $\bigcap \mathcal{I}$  также является моделью ХЛП  $\mathcal{P}$

Доказательство.

Предположим *от противного*, что  $\bigcap \mathcal{I}$  не является моделью  $\mathcal{P}$

Тогда существует правило  $\forall \dots (B_1 \& \dots \& B_k \rightarrow A) \in \Phi_{\mathcal{P}}$ , такое что  $\bigcap \mathcal{I} \not\models \forall \dots (B_1 \& \dots \& B_k \rightarrow A)$

По семантике  $\forall$ , существует набор предметов  $\tilde{d}^n$ , такой что  $\bigcap \mathcal{I} \not\models (B_1 \& \dots \& B_k \rightarrow A)[\tilde{d}^n]$

Для технической простоты без ограничения общности положим, что в сигнатуре языка формул содержится хотя бы одна константа

# Лемма о пересечении моделей ХЛП (доказательство)

$$\begin{aligned} & (\forall \dots (B_1 \& \dots \& B_k \rightarrow A)) \in \Phi_{\mathcal{P}} \\ \cap \mathcal{I} \not\models & (B_1 \& \dots \& B_k \rightarrow A)[\tilde{d}^n] \text{ для любых } \tilde{d}^n \end{aligned}$$

Тогда предметами  $\mathcal{H}$ -интерпретаций являются основные термы, и последнее соотношение означает, что существует основной пример  $B_1^g \& \dots \& B_k^g \rightarrow A^g$  правила из  $\Phi_{\mathcal{P}}$ , такой что  $\cap \mathcal{I} \not\models B_1^g \& \dots \& B_k^g \rightarrow A^g$ . По семантике  $\&$  и  $\rightarrow$ :  $\cap \mathcal{I} \models B_1^g, \dots, \cap \mathcal{I} \models B_k^g, \cap \mathcal{I} \not\models A^g$ .

По теоретико-множественному заданию  $\mathcal{H}$ -интерпретаций:

$$B_1^g \in \cap \mathcal{I}, \quad \dots, \quad B_k^g \in \cap \mathcal{I}, \quad A^g \notin \cap \mathcal{I}$$

По определению  $\cap \mathcal{I}$ :

- ▶ существует  $\mathcal{H}$ -модель  $\mathcal{I}$  ХЛП  $\mathcal{P}$ , такая что  $A^g \notin \mathcal{I}$ , и
- ▶ для любой  $\mathcal{H}$ -модели  $\mathcal{J}$  ХЛП  $\mathcal{P}$  (в том числе для  $\mathcal{I}$ ) верно  $B_1^g \in \mathcal{J}, \dots, B_k^g \in \mathcal{J}$ .

Применив теоретико-множественный способ задания  $\mathcal{H}$ -интерпретаций и семантику  $\&$ ,  $\rightarrow$  и  $\forall$  к  $\mathcal{I}$  так же, как они применялись к  $\cap \mathcal{I}$ , но в обратном порядке, получим соотношение  $\mathcal{I} \not\models \forall \dots (B_1 \& \dots \& B_k \rightarrow A)$ . То есть  $\mathcal{I}$  не является моделью для  $\Phi_{\mathcal{P}}$ , что **противоречит** выбору  $\mathcal{I}$  ▼

Наименьшей моделью ХЛП  $\mathcal{P}$  будем называть  $\mathcal{H}$ -модель, наименьшую относительно теоретико-множественного включения среди всех  $\mathcal{H}$ -моделей ХЛП  $\mathcal{P}$  (то есть модель, вложенную как множество в каждую другую модель)

**Теорема.** Для любой ХЛП  $\mathcal{P}$  существует наименьшая модель

Доказательство.

По последней лемме, если  $\mathcal{I}$  — семейство всех  $\mathcal{H}$ -моделей ХЛП  $\mathcal{P}$ , то  $\bigcap \mathcal{I}$  —  $\mathcal{H}$ -модель ХЛП  $\mathcal{P}$

Нетрудно видеть, что эта модель является наименьшей по теоретико-множественному включению в семействе  $\mathcal{I}$  ▼

$M_{\mathcal{P}}$  — так будем обозначать наименьшую модель ХЛП  $\mathcal{P}$

**Теорема.**  $M_{\mathcal{P}} = B_{\mathcal{H}} \cap \{\varphi \mid \Phi_{\mathcal{P}} \models \varphi\}$

**Доказательство.** (по прежнему считаем, что в сигнатуре есть хотя бы одна константа)

( $\supseteq$ ): Рассмотрим основной атом  $A$ , такой что  $\Phi_{\mathcal{P}} \models A$

По определению логического следования, верно  $M_{\mathcal{P}} \models A$

Следовательно,  $A \in M_{\mathcal{P}}$

( $\subseteq$ ): Предположим *от противного*, что существует основной атом  $A$ , такой что  $A \in M_{\mathcal{P}}$  и  $\Phi_{\mathcal{P}} \not\models A$

По определению логического следования, существует модель  $\mathcal{I}$  системы  $\Phi_{\mathcal{P}}$ , такая что  $\mathcal{I} \not\models A$

По семантике  $\neg$ , верно  $\mathcal{I} \models \neg A$

По теореме об  $\mathcal{H}$ -интерпретациях, существует эрбрановская интерпретация  $\mathcal{I}_h$ , такая что  $\mathcal{I}_h \models \neg A$

По семантике  $\neg$ , верно  $\mathcal{I}_h \not\models A$

По теоретико-множественному заданию  $\mathcal{H}$ -интерпретаций, верно  $A \notin \mathcal{I}_h$

Следовательно,  $A \notin M_{\mathcal{P}}$ , что *противоречит* выбору  $A$  ▼

## Пример

Для программы

```
птица(орёл);           летает(орёл);  
птица(пингвин);       летает(самолёт);  
обтекаемый(самолёт);  
обтекаемый(X) ← птица(X), летает(X);
```

наименьшая модель устроена так:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{птица}(\mathbf{орёл}), & \text{птица}(\mathbf{пингвин}), \\ \text{летает}(\mathbf{орёл}), & \text{летает}(\mathbf{самолёт}), \\ \text{обтекаемый}(\mathbf{орёл}), & \text{обтекаемый}(\mathbf{самолёт}) \end{array} \right\}$$

В этой модели содержится наименьший набор основных фактов, которые могут быть истинными согласно написанному в программе

Будем считать, что формула  $\varphi$  **следует в допущении замкнутости мира** из системы  $\Phi_{\mathcal{P}}$ , отвечающей ХЛП  $\mathcal{P}$  ( $\Phi_{\mathcal{P}} \models_{cwa} \varphi$ ), если  $M_{\mathcal{P}} \models \varphi$

В частности, в таком определении действительно верно, что пингвин — нелетающая птица:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{птица}(\mathbf{орёл}), \text{ птица}(\mathbf{пингвин}), \\ \text{летает}(\mathbf{орёл}), \text{ летает}(\mathbf{самолёт}) \end{array} \right\} \models_{cwa} \text{птица}(\mathbf{пингвин}) \ \& \ \neg \text{летает}(\mathbf{пингвин}),$$

так как в наименьшей модели программы содержится (выполняется) атом «птица(**пингвин**)» и не содержится (не выполняется) атом «летает(**пингвин**)»