Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru $\rightarrow$ Лекционные курсы
$\rightarrow$ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 34

Хорновские логические программы:
корректность операционной семантики

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Вступление

Для ХЛП определены две семантики:

1. Декларативная (основная):
   - Программа — это система формул
   - Правильный ответ — это подстановка целевых переменных, при применении которой к запросу он следует из программы

2. Операционная (вспомогательная):
   - Шаг вычисления программы — это применение правила SLD-резолюции
   - SLD-вычислимый ответ — это композиция подстановок, получаемых по ходу вычисления, спроектированная на целевые переменные

А как связаны между собой правильные и SLD-вычислимые ответы?

Вычисления ХЛП и резолютивный вывод

Как упоминалось ранее,

- Каждому правилу $\mathcal{R}$ ХЛП можно сопоставить дизъюнкт-правило:
  $$\Phi_{A \leftarrow B_1, \ldots, B_k;} = \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_k \vee A \sim B_1 \,\&\, \ldots \,\&\, B_k \to A$$
- Каждому запросу $\mathcal{Q}$ ХЛП можно сопоставить дизъюнкт-запрос:
  $$\neg\Phi_{?C_1, \ldots, C_m} = \neg C_1 \vee \cdots \vee \neg C_m \sim \neg(C_1 \,\&\, \ldots \,\&\, C_m)$$
- Для любых запроса $\mathcal{Q}$, правила $\mathcal{R}$ и их SLD-резольвенты $\mathcal{Q}'$ дизъюнкт $\neg\Phi_{\mathcal{Q}'}$ является резольвентой дизъюнктов $\neg\Phi_{\mathcal{Q}}$ и $\Phi_{\mathcal{R}}$ для того же унификатора

Построение SLD-резольвенты — это один шаг SLD-резолютивного вычисления, и последний пункт можно обобщить с одного шага вычисления на произвольное число шагов

Вычисления ХЛП и резолютивный вывод

Лемма (о соответствии вычислений и входных выводов)

Для любого конечного SLD-резолютивного вычисления

$$\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \theta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \theta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_{n-1}, k_{n-1}, \theta_{n-1}} \mathcal{Q}_n$$

программы $\mathcal{P}$ последовательность дизъюнктов

$$\neg\Phi_{\mathcal{Q}_1}, \Phi_{\mathcal{R}_1}, \neg\Phi_{\mathcal{Q}_2}, \Phi_{\mathcal{R}_2}, \dots, \Phi_{\mathcal{R}_{n-1}}, \neg\Phi_{\mathcal{Q}_n}$$

является входным резолютивным выводом из $S_{\mathcal{P}} \cup \{\neg\Phi_{\mathcal{Q}_1}\}$, в котором для вычисления резольвент $\mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_n$ применяются соответственно унификаторы $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$

Доказательство.

База: $n = 1$

$\neg\Phi_{\mathcal{Q}_1}$ — это тривиальный входной вывод из $S_{\mathcal{P}} \cup \{\neg\Phi_{\mathcal{Q}_1}\}$

Индуктивный переход: полагая утверждение доказанным для $n < N$, докажем его для $n = N$

Вычисления ХЛП и резолютивный вывод

Лемма (о соответствии вычислений и входных выводов)

Для любого конечного SLD-резолютивного вычисления

$$\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \theta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \theta_2} \ldots \xrightarrow{\mathcal{R}_{n-1}, k_{n-1}, \theta_{n-1}} \mathcal{Q}_n$$

программы $\mathcal{P}$ последовательность дизъюнктов

$$\neg\Phi_{\mathcal{Q}_1}, \Phi_{\mathcal{R}_1}, \neg\Phi_{\mathcal{Q}_2}, \Phi_{\mathcal{R}_2}, \ldots, \Phi_{\mathcal{R}_{n-1}}, \neg\Phi_{\mathcal{Q}_n}$$

является входным резолютивным выводом из $S_\mathcal{P} \cup \{\neg\Phi_{\mathcal{Q}_1}\}$, в котором для вычисления резольвент $\mathcal{Q}_2, \ldots, \mathcal{Q}_n$ применяются соответственно унификаторы $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$

Доказательство (индуктивный переход).

По индуктивному предположению, последовательность

$$\neg\Phi_{\mathcal{Q}_2}, \Phi_{\mathcal{R}_2}, \ldots, \Phi_{\mathcal{R}_{n-1}}, \neg\Phi_{\mathcal{Q}_n}$$

является входным резолютивным выводом из $S_\mathcal{P} \cup \{\neg\Phi_{\mathcal{Q}_2}\}$, в котором последовательно применяются унификаторы $\theta_2 \ldots \theta_{n-1}$

Как обсуждалось ранее, $\neg\Phi_{\mathcal{Q}_2}$ — это резольвента дизъюнктов $\neg\Phi_{\mathcal{Q}_1}$ и $\Phi_{\mathcal{R}_1}$ для унификатора θ_1

Осталось заметить, что $\Phi_{\mathcal{R}_1}$ — вариант дизъюнкта из $S_\mathcal{P}$ ▼

Теорема о корректности операционной семантики ХЛП

Для любой ХЛП $\mathcal{P}$ и любого запроса $\mathcal{Q}$ верно следующее: любой SLD-вычислимый ответ на $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$ является правильным ответом на $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$

Доказательство.

Рассмотрим SLD-вычислимый ответ θ на запрос $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$

По определению этого ответа, существует успешное SLD-резолютивное вычисление

$$\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \theta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \theta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \theta_n} \square,$$

такое что $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}$ и $\theta = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n)|_{\mathrm{Var}_{\mathcal{Q}}}$

По последней лемме, последовательность

$$\neg\Phi_{\mathcal{Q}_1}, \Phi_{\mathcal{R}_1}, \neg\Phi_{\mathcal{Q}_2}, \Phi_{\mathcal{R}_2}, \dots, \Phi_{\mathcal{R}_n}, \square$$

является входным резолютивным выводом из $S_{\mathcal{P}} \cup \{\neg\Phi_{\mathcal{Q}_1}\}$, в котором для построения резольвент применяются унификаторы $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$

Теорема о корректности операционной семантики ХЛП

Для любой ХЛП $\mathcal{P}$ и любого запроса $\mathcal{Q}$ верно следующее: любой SLD-вычислимый ответ на $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$ является правильным ответом на $\mathcal{Q}$ к $\mathcal{P}$

Доказательство. (SLD-вычислимый ответ $\theta = (\theta_1\theta_2\dots\theta_n)|_{\mathrm{Var}_{\mathcal{Q}}}$)

По теореме о входном резолютивном выводе как средстве вычисления, верно соотношение

$$S_{\mathcal{P}} \models \forall \dots (\Phi_{\mathcal{Q}}\theta_1\theta_2\dots\theta_n)$$

По свойствам применения подстановок и устройству переменных запроса, справедливо и

$$S_{\mathcal{P}} \models \forall \dots (\Phi_{\mathcal{Q}}(\theta_1\theta_2\dots\theta_n)|_{\mathrm{Var}_{\mathcal{Q}}})$$

Значит, $(\theta_1\theta_2\dots\theta_n)|_{\mathrm{Var}_{\mathcal{Q}}}$ — это по определению правильный ответ на запрос $\mathcal{Q}$ к программе $\mathcal{P}$ ▼