Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Осенний семестр 2022–2023 уч. г. группы 311–319

Лектор — профессор С. А. Ложкин
(lozhkin@cs.msu.ru)

Информационная поддержка курса:
http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(2-й_поток,_3_курс)

III. Синтез и сложность управляющих систем

15. Задача синтеза и простейшие нижние оценки сложности ФАЛ. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций

Утверждение 15.1 Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, и π-схема Σ_f, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2n \cdot |N_f| - 1, \qquad L(\Sigma_f) \leqslant n|N_f|,$$
$$D(\mathcal{F}_f) \leqslant \lceil \log(n \cdot |N_f|) \rceil + 2.$$

Следствие 1. В силу указанных неравенств, с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π-схемой сложности 2, а также формулой из $\mathcal{U}^{\Phi}$, имеющей сложность 2, выполняются неравенства

$$L^{\mathrm{C}}(n) \leqslant L^{\Phi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n+1} - 1,$$
$$L^{\mathrm{K}}(n) \leqslant L^{\pi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n}.$$

Следствие 2.

$$D(n) \leqslant n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Утверждение 15.2 Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π-схема Σ_f и формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^n + |N_f| - 2,$$
$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Следствие

$$L^{\pi}(n) \leqslant 2^{n+1} - 2,$$
$$L^{\Phi}(n) \leqslant 3 \cdot 2^n - 4.$$

Функции, встречающиеся в приложениях:

1. линейная ФАЛ порядка n, то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\overline{\ell}_n$;
2. мультиплексорная ФАЛ μ_n порядка n;
3. дешифратор $\overrightarrow{Q}_n$ (дизъюнктивный дешифратор $\overrightarrow{J}_n$) порядка n;
4. универсальная система $\overrightarrow{P}_2(n)$ порядка n, состоящая из всех различных ФАЛ множества $P_2(n)$, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

Утверждение 15.3 Для любого натурального n в $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$ существует универсальная СФЭ порядка n, сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Следствие

$$L_{\text{Б}}^{\text{С}}(\overrightarrow{P}_2(n)) \leqslant 2^{2^n} - n.$$

Утверждение 15.4 Если ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant n - 1, \qquad L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant n.$$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП x_i, $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant n \qquad (\text{соответственно } L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant n+k).$$

Следствие

$$L^{\mathrm{C}}(\ell_n) \geqslant n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\ell_n) \geqslant 2n,$$
$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \geqslant 2^n + n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\mu_n) \geqslant 2^n + 2n.$$

Утверждение 15.5 Для системы $F = (f_1, \ldots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geqslant m \qquad (\text{соответственно} L_{\text{Б}}^{\mathrm{C}}(F) \geqslant m).$$

Следствие

$$L^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n,$$

$$L^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n,$$

$$L^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - n, \quad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - 2$$

Замечание В силу следствия универсальная СФЭ U_n, построенная в утв. 15.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$.

16. Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем

Утверждение 16.3 Если для существенной БП x_n ФАЛ $f \in P_2(n)$, и для любого (некоторого) σ, $\sigma \in B$, ФАЛ $f|_{x_n=\sigma} = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$, то

$$L^{\mathsf{C}}_{\&,\vee}(f) \geqslant \min\{L^{\mathsf{C}}_{\&,\vee}(f|_{x_n=0}), L^{\mathsf{C}}_{\&,\vee}(f|_{x_n=1})\} + 2$$

$\Big($соответственно $L^{\mathsf{C}}_{\&,\vee}(f) \geqslant L^{\mathsf{C}}_{\&,\vee}(f|_{x_n=\sigma}) + 1\Big)$.

Следствие

$$L^{\mathsf{C}}(\mu_n) \geqslant 2^{n+1} + n - 1,$$
$$D(\mu_n) \geqslant n + 2.$$

Утверждение 16.4 Если система ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(\boldsymbol{n})$, отличных от 0 и 1, то

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geqslant 2^{1-n} \sum_{j=1}^{m} \left| N_{f_j} \right| .$$

Следствие $L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \geqslant 2^{n+1} - 2$

Утверждение 16.5 Для любого натурального n выполняются неравенства:

$$L^{\mathrm{C}}(\ell_n) \leqslant 4n-4, \quad L^{\mathrm{C}}(\bar{\ell}_n) \leqslant 4n-4+\lfloor 1/n \rfloor;$$
$$L^{\pi}(\mu_n) \leqslant 3\cdot 2^n-2, \quad L^{\Phi}(\mu_n) \leqslant 2^{n+2}-3;$$
$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^n+O(n\cdot 2^{n/2}),\ L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^{n+1}-2;$$
$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^n+O(n\cdot 2^{n/2}).$$

Следствие

$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{Q}_n) \sim L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^n.$$

17. Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона

Утверждение 17.1. Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а F, F' и F'' — матрицы, реализуемые КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно. Тогда

$$F \geqslant F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'',$$

если КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Следствие 1. В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС Σ, $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, которая соответствует выходу КС Σ', реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ'.

Следствие 2. Равенство $F = F' \cdot F''$ выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Замечание. Отождествление входов (выходов) у разделительной по входам (выходам) КС дает разделительную по рассматриваемой группе полюсов КС.

18. Каскадные контактные схемы и схемы из функциональных элементов. Метод каскадов и примеры его применения, метод Шеннона

Утверждение 18.1 Если $(1, m)$-ККС Σ' реализует систему ФАЛ $F' = (f_1', \ldots, f_m')$, то существует $(1, m)$-ККС Σ'', которая реализует систему ФАЛ $\overline{F}' = \left(\overline{f}'_1, \ldots, \overline{f}'_m\right)$ и для которой $L(\Sigma'') \leqslant 2L(\Sigma')$.

Утверждение 18.2 Для любого натурального n и $\sigma \in B$ выполняются неравенства:

$$L^{\mathrm{K}}(\ell_n^\sigma) \leqslant 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \; L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \leqslant 2 \cdot 2^{2^n},$$

$$L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \leqslant 2^{n+2} - 6.$$

Утверждение 18.3 Для функций Шеннона $L^{\mathrm{K}}(n)$ и $L^{\mathrm{C}}(n)$ выполнены соотношения:

$$L^{\mathrm{K}}(n) \lesssim 4\frac{2^n}{n}, \qquad L^{\mathrm{C}}(n) \lesssim 8\frac{2^n}{n}.$$

19. Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Утверждение 19.1 Для некоторых последовательностей $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$, где $i = 1, \ldots, 4$, и $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\varepsilon_i(n) \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$ и $\varepsilon_i(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства:

$$L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant \Big(1 - \varepsilon_1(n)\Big)\frac{2^n}{n}, \qquad L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant \Big(1 + \varepsilon_2(n)\Big)\frac{2^n}{n},$$

$$L^{\Phi}(f) \geqslant \Big(1 - \varepsilon_3(n)\Big)\frac{2^n}{\log n}, \quad D(f) \geqslant n - \log\log n - \varepsilon_4(n).$$

Следствие

$$D(n) \geqslant \lceil n - \log\log n - o(1) \rceil,$$

$$L^{\mathrm{C}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$L^{\Phi}(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n},$$

$$L^{\mathrm{K}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}.$$

20. Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Утверждение 20.1 Для любых натуральных p, m и s, где $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil$, существует стандартное ДУМ G порядка m и высоты s, которое является ДУМ ранга p и для которого:

1) $\lambda = |G| \leqslant p 2^s$;
2) система из p характеристических ФАЛ $\psi_1, \ldots, \psi_p$ ДУМ G обладает тем свойством, что для любой ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, и соответствующих ФАЛ $g_1, \ldots, g_p$ из G справедливы представления

$$g = g_1 \vee \cdots \vee g_p = \psi_1 g_1 \vee \cdots \vee \psi_p g_p.$$

Утверждение 20.2 Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, такая, что

$$L\big(\Sigma_f\big) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{5\log n + O(1)}{n}\right).$$

Следствие. Из этого утверждения с учетом следствия из утверждения 20.1 вытекает, что

$$L^{\mathrm{C}}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

21. Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Утверждение 21.1 Для любых натуральных m, λ и $q = m + \lambda$ и для любой системы ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_\lambda)$ из $P_2^\lambda(m)$ существует m-регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q такое, что любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$, либо с ее отрицанием.

Замечание. Если в условиях утверждения $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda) = \nu^{-1}(j-1)$, то $g_i \equiv x_{i+m}^{\overline{\alpha_j}}$ на δ_j.

Утверждение 21.2 Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, в $\mathcal{U}^{\Phi}$ существует реализующая ее формула $\mathcal{F}_f$, для которой

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{2\log\log n + O(1)}{\log n}\right),$$
$$D(\mathcal{F}_f) \leqslant n - \log\log n + O(1).$$

Следствие. Из этих оценок с учетом нижних оценок следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^{\Phi}(n) \sim \frac{2^n}{\log n}, \quad D(n) \leqslant n - \log\log n + O(1).$$

22. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем

Утверждение 22.1 Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что

$$L(\Sigma_f) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Следствие. Из этой оценки с учетом нижней оценки следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Замечание. Построенную КС Σ_f можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda+1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа.

23. Синтез схем для дешифраторов и мультиплексоров, асимптотически точные оценки их сложности

Утверждение 23.1 Для $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполняются неравенства

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right).$$

Следствие. Оценки утверждения 23.1 и следствия из следствия из утверждений 16.2, 16.4 дают асимптотические равенства
$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{Q}_n) \sim 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^{n+1}.$$

Утверждение 23.2 Для $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$L^{\pi}(\mu_n) \leqslant 2 \cdot 2^n + O\left(2^n/n\right),$$
$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \leqslant 2 \cdot 2^n + O\left(2^n/n\right),$$
$$D(\mu_n) \leqslant n + 6,$$

причем существует такая реализующая ФАЛ μ_n и бесповторная по информационным БП формула $\mathcal{M}_n$ с поднятыми отрицаниями, глубина которой удовлетворяет последнему из них, альтернирование не больше 3, а сложность не превосходит $7 \cdot 2^n$.

Следствие. Из полученных оценок в силу следствий из утверждения 16.3 вытекает, что

$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \sim 2^{n+1}, \qquad D(\mu_n) = n + O(1).$$