

Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Семинар 1

Дедуктивная верификация
императивных программ

Проводит:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Соглашение по умолчанию

Каждое упражнение сформулировано для **целочисленной арифметической интерпретации** \mathcal{I}_{ar} , содержащей:

- ▶ константы $0, 1, -1, 2, -2, \dots$
- ▶ функциональные символы $+, -, \cdot, /, \%$, обозначающие обычные арифметические операции
- ▶ предикатные символы $=, \neq, >, <, \geq, \leq$, обозначающие обычные арифметические отношения

Упражнение 1

Построить вычисление заданной программы на заданной оценке

```
x := z;  
while x < y do  
  if x%2 > 0 then  
    x := 3 · x + 1;  
  else  
    x := x/2;  
  fi  
od
```

Оценка:

1. $[x/15, y/4, z/1]$
2. $[x/3, y/1, z/0]$

Упражнение 2

Является ли программа в тройке Хоара

- ▶ частично корректной
- ▶ totally корректной

относительно предусловия и постусловия тройки?

$$\{\text{t}\} \quad x := \mathbf{100}; \quad \{\text{t}\}$$

$$\{\text{t}\} \quad x := \mathbf{100}; \quad \{\text{f}\}$$

$$\{\text{f}\} \quad x := \mathbf{100}; \quad \{\text{t}\}$$

$$\{\text{f}\} \quad x := \mathbf{100}; \quad \{\text{f}\}$$

$$\{\text{t}\} \quad x := \mathbf{100}; \quad \{x = \mathbf{100}\}$$

$$\{x = \mathbf{50}\} \quad x := \mathbf{100}; \quad \{x = \mathbf{50}\}$$

$$\{\text{f}\} \quad x := \mathbf{100}; \quad \{x = \mathbf{50}\}$$

$$\{y = \mathbf{50}\} \quad x := \mathbf{100}; \quad \{y = \mathbf{50}\}$$

Упражнение 2

Является ли программа в тройке Хоара

- ▶ частично корректной
- ▶ totally корректной

относительно предусловия и постусловия тройки?

$\{\text{t}\}$ **while** $x \neq 0$ **do** $x := x - 1$; **od** $\{\text{t}\}$

$\{\text{t}\}$ **while** $x \neq 0$ **do** $x := x - 1$; **od** $\{\text{f}\}$

$\{\text{f}\}$ **while** $x \neq 0$ **do** $x := x - 1$; **od** $\{\text{t}\}$

$\{\text{f}\}$ **while** $x \neq 0$ **do** $x := x - 1$; **od** $\{\text{f}\}$

$\{x > 3\}$ **while** $x \neq 0$ **do** $x := x - 1$; **od** $\{x = 0\}$

$\{x > 3\}$ **while** $x \neq 0$ **do** $x := x - 1$; **od** $\{x > -5\}$

$\{x < 3\}$ **while** $x \neq 0$ **do** $x := x - 1$; **od** $\{x = 0\}$

$\{x < -3\}$ **while** $x \neq 0$ **do** $x := x - 1$; **od** $\{x = 5\}$

Упражнение 2

Является ли программа в тройке Хоара

- ▶ частично корректной
- ▶ totally корректной

относительно предусловия и постусловия тройки?

$$\{\text{tt}\} \quad x := E; \quad \{x = E\}$$

(E — произвольный терм)

Упражнение 3

Предложить предусловие и постусловие, отвечающие требованию корректности программы π (в предположении, что π не содержит переменные u_1, u_2, \dots):

1. выходное значение переменной `prod` — это произведение выходных значений переменных x и y
2. выходное значение переменной `prod` — это произведение входных значений переменных x и y
3. π меняет местами значения переменных x и y
4. входные значения переменных x и y и выходные значения `quo` и `rem` — это, соответственно, делимое, делитель, частное и остаток от деления
5. если входное значение n переменной x неотрицательно, то её выходное значение — это целая часть числа \sqrt{n}

Упражнение 4

Построить слабое предусловие для следующей программы и постусловия:

$x := x + 10; \{x = 7\}$

$x := x + 10; \{\text{t}\}$

$x := x + 10; \{\text{f}\}$

$x := x + 10; \{x = x + 10\}$

$x := x + 10; y := x + y; \{x = A \ \& \ y = B\}$

if $x = y$ **then** $x := 7$; **else** $x := x + y + 2$; **fi** $\{x = A \ \& \ y = B \ \& \ z = C\}$

Упражнение 5

Доказать, что заданная программа частично корректна относительно заданных требований

$$x := x + 1;$$
$$y := y + 1;$$

Требования: если входные значения переменных x и y равны, то выходные значения также равны

Упражнение 5

Доказать, что заданная программа частично корректна относительно заданных требований

$z := x;$

$x := y;$

$y := z;$

Требования: программа меняет местами значения переменных x и y

Упражнение 5

Доказать, что заданная программа частично корректна относительно заданных требований

```
pr := 0; cou := y;  
while cou > 0 do  
  pr := pr + x;  
  cou := cou - 1;  
od
```

Требования: выходное значение переменной `pr` — это произведение неотрицательных входных значений переменных `x` и `y`

Упражнение 5

Доказать, что заданная программа частично корректна относительно заданных требований

```
quo := 0; rem := x;  
while rem  $\geq$  y do  
    rem := rem - y;  
    quo := quo + 1;  
od
```

Требования: если входные значения переменных x и y соответственно положительны, то входные значения переменных x и y и выходные значения quo и rem — это, соответственно, делимое, делитель, частное и остаток от деления

Упражнение 5

Доказать, что заданная программа частично корректна относительно заданных требований

```
x := 0; y := 1; cou := n;  
while cou > 0 do  
  h := y;  
  y := x + y;  
  x := h;  
  cou := cou - 1;  
od
```

Требования: выходное значение переменной x — это n -е число Фибоначчи (для неотрицательного входного значения переменной n)

Немного о тотальной корректности

Чтобы доказать, что частично корректная программа тотально корректна, по определению достаточно показать, что для каждого значения входных данных, удовлетворяющего предусловию, число итераций каждого цикла конечно

Популярный и достаточно простой для понимания способ это доказать — это предоставить **ограничивающую функцию** (bound function) для каждого цикла: выражение (терм) E , такое что:

- ▶ множество всевозможных значений E , вычисляющихся при проверке условия цикла, ограничено снизу величиной, зависящей только от значения E непосредственно перед первой итерацией
- ▶ значение E строго уменьшается на каждой итерации цикла и не может уменьшаться бесконечно долго

Немного о тотальной корректности

Пример

Рассмотрим цикл

while $x < 0$ **do** $x := x + 1$; **od**

и произвольное состояние данных до выполнения этого цикла

Тогда $(-x)$ — ограничивающая функция для этого цикла:

- ▶ значение $-x$ уменьшается на единицу на каждой итерации
- ▶ если начальное значение x отрицательно, то граница снизу — **0**
- ▶ если начальное значение n переменной x неотрицательно, то граница снизу — $-n$

Упражнение 6

Доказать тотальную корректность каждой программы из упражнения 5

Массивы

$A[t]$ — это терм, обозначающий t -й элемент массива A

Переменные программы поделены на **целочисленные** и **массивные**

Каждая массивная переменная A используется только в термах вида $A[t]$

Никакая целочисленная переменная x не используется в термах вида $x[t]$

Терм $A[t]$ может быть записан в левой части присваивания

В состояние данных включены все целочисленные переменные, а также значения переменных

$$\dots, A[-2], A[-1], A[0], A[1], A[2], \dots$$

для каждой массивной переменной A

Отношение переходов (шаг вычисления программы) естественным образом обобщается на присваивания вида $A[t] := t'$;

Упражнение 7

Предложить предусловие и постусловие, отвечающие требованию корректности программы π (в предположении, что π не содержит переменные u_1, u_2, \dots):

1. π обнуляет все значения $s[0 : n - 1]$ (для заданного входного значения переменной n)
2. π вычисляет в переменной m максимальное число среди $s[0 : n - 1]$ (для заданного входного значения переменной n) и не меняет значение s
3. π зеркально отражает набор $s[0 : n - 1]$ (для заданного входного значения переменной n)

Обозначение: $s[t_1 : t_2]$ — это набор значений
($s[t_1], s[t_1 + 1], \dots, s[t_2]$)

Упражнение 8

Доказать частичную корректность заданной программы относительно заданных требований и выяснить, является ли эта программа totally корректной

```
x := 1;  
a[1] := 2;  
a[x] := x;
```

Требования: выходное значение переменной $a[1]$ обязательно равно 1

Упражнение 8

Доказать частичную корректность заданной программы относительно заданных требований и выяснить, является ли эта программа totally correct

```
x := 0;  
while a[x] ≠ 0 do  
  x := x + 1;  
od
```

Требования: если входные значения $a[0 : 1]$ — это набор $(1, 0)$, то

- ▶ выходные значения $a[0]$ и $a[1]$ равны входным и
- ▶ выходное значение $a[x]$ равно 0

Упражнение 8

Доказать частичную корректность заданной программы относительно заданных требований и выяснить, является ли эта программа totally correct

```
x := 2;  
while a[x] ≠ 0 do  
  x := x + 1;  
od
```

Требования: если входные значения $a[0 : 1]$ — это набор $(1, 0)$, то

- ▶ выходные значения $a[0]$ и $a[1]$ равны входным и
- ▶ выходное значение $a[x]$ равно 0

Упражнение 8

Доказать частичную корректность заданной программы относительно заданных требований и выяснить, является ли эта программа totally correct

```
i := 1; m := s[0];
while i < n do
  if s[i] < m then
    m := s[i];
  fi
  i := i + 1;
od
```

Требования: программа вычисляет в переменной m максимальное число среди $s[0 : n - 1]$

Обозначение: **if** C **then** π **fi** — это синоним записи **if** C **then** π **else** \emptyset **fi**

Упражнение 8

Доказать частичную корректность заданной программы относительно заданных требований и выяснить, является ли эта программа тотально корректной

```
sum := 0; i := 0;
while i < n do
  sum := sum + s[i];
  i := i + 1;
od
```

Требования: программа вычисляет в переменной `sum` сумму значений `s[0 : n - 1]`, если входное значение `n` положительно

Упражнение 8

Доказать частичную корректность заданной программы относительно заданных требований и выяснить, является ли эта программа totally correct

```
i := 0;
while 2 · i < n - 1 do
  y := s[i];
  s[i] := s[n - i - 1];
  s[n - i - 1] := y;
  i := i + 1;
od
```

Требования: набор значений $s[0 : n - 1]$ зеркально отражается программой, если $n \geq 1$

Challenge

Доказать тотальную корректность следующей программы

```
i := n - 1;
while i > 0 do
  k := i; j := i - 1;
  while j ≥ 0 do
    if s[j] > s[k] then
      k := j;
    fi
    j := j - 1;
  od
  y := s[k]; s[k] := s[i]; s[i] := y;
  i := i - 1;
od
```

Требования: программа сортирует набор значений $s[0 : n - 1]$ по неубыванию, если $n \geq 1$ перед началом выполнения программы