Лекция 2. Конъюнктивные нормальные формы. Имплицента, простая имплицента функции. Сокращенная КНФ функции алгебры логики. Способы построения сокращенной КНФ.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Литерал

Пусть

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \sigma = 0. \end{cases}$$

Выражение x^σ, где $\sigma \in E_2$, называется **литералом** (переменной x).

Если $\sigma = 1$, то литерал x^σ называется **положительным**, если $\sigma = 0$, то литерал x^σ называется **отрицательным**.

Элементарная дизъюнкция

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_r},$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in E_2$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ — различные переменные, называется **элементарной дизъюнкцией** (ЭД) ранга r, $r \geqslant 1$.

Элементарной дизъюнкцией ранга 0 назовем константу 0.

Считаем, что две ЭД совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них литералов.

Приведение к ЭД или к 1

Отметим, что любую дизъюнкцию литералов или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести либо к некоторой ЭД, либо к константе 1.

Примем, что любая дизъюнкция литералов или констант всегда приведена к соответствующей ЭД или константе 1.

Сужение ЭД

Если D_1, D_2 — ЭД, то D_1 называется **сужением** D_2, если каждый литерал ЭД D_1 входит в ЭД D_2.

Например, ЭД $D_1 = x_1 \vee \bar{x}_2$ является сужением ЭД $D_2 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$.

Сужение называется собственным, если ЭД при этом не совпадают.

Если ЭД D_1 является сужением ЭД D_2, то D_2 называется **расширением** D_1.

Сужение ЭД

Отметим, что ЭД D_1 является сужением ЭД D_2 тогда и только тогда, когда

1) $N_0(D_2) \subseteq N_0(D_1)$ (или $N_1(D_1) \subseteq N_1(D_2)$);

2) для любого $\alpha \in E_2^n$ из $D_2(\alpha) = 0$ следует $D_1(\alpha) = 0$;

3) $D_1 \cdot D_2 = D_1$ (выполняется **правило поглощения**).

Конъюнктивная нормальная форма

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) длины l, $l \geqslant 1$, назовем конъюнкцию l различных ЭД.

Конъюнктивной нормальной формой длины 0 назовем константу 1.

Считаем, что две КНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭД.

Приведение к КНФ

Отметим, что любую конъюнкцию ЭД или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести к некоторой КНФ.

Примем, что любая конъюнкция ЭД или констант всегда приведена к соответствующей КНФ.

Соглашения по КНФ

Каждая КНФ над переменными $x_1, \ldots, x_n$ определяет какую-то функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n)}$.

Отметим, что если ЭД D_1 является сужением ЭД D_2, то $D_1 \cdot D_2 = D_1$ (**правило поглощения**).

Поэтому если в некоторую КНФ входят такие ЭД D_1, D_2, то ЭД D_2 можно удалить из этой КНФ меняя функцию, которую определяет эта КНФ.

При этом говорят, что ЭД D_1 **поглощает** ЭД D_2 в этой КНФ.

Считаем, что в любой КНФ всегда выполнены все возможные поглощения, т.е. в ней не найдутся такие две ЭД, что одна из них является сужением другой.

Совершенная КНФ

Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена какой-то КНФ, а именно, если $f \neq 1$, то ее можно записать **совершенной** КНФ:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\alpha \in E_2^n : f(\alpha) = 0} (x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}).$$

Импликанта функции

Импликантой функции $f \in P_2$ называется такая ЭД D, что $N_0(D) \subseteq N_0(f)$.

Если к тому же никакое собственное сужение импликанты D не является импликантой функции f, то ЭД D называется **простой импликантой** функции f.

Отметим, что ЭД D является импликантой функции $f \in P_2^{(n)}$, если для любого набора $\alpha \in E_2^n$ из $D(\alpha) = 0$ следует $f(\alpha) = 0$.

Критерий простоты имплиценты

Теорема 1 (критерий простоты имплиценты). *Пусть ЭД D — имплицента функции $f \in P_2^{(n)}$. ЭД D является простой имплицентой функции f тогда и только тогда, когда для каждого литерала $L(x_i)$ из D найдется такой набор $\alpha \in E_2^n$, обращающий литерал L в единицу и все другие литералы из D в ноль, что $f(\alpha) = 1$.*

Критерий простоты имплиценты

Доказательство.
1. *Необходимость.* Пусть $D = L \vee D_1$ — простая имплицента функции f, где $L(x_i) = x_i^\sigma$, $\sigma \in E_2$, и D_1 — дизъюнкция всех остальных литералов ЭД D.

Предположим обратное: пусть для каждого такого набора $\alpha \in E_2^n$, для которого $L(\alpha) = 1$ и $D_1(\alpha) = 0$, выполняется $f(\alpha) = 0$.

Отметим, что при этом для каждого такого набора α верно $\alpha_i = \sigma$.

Критерий простоты импликленты

Рассмотрим такой произвольный набор $\beta \in E_2^n$, что $D_1(\beta) = 0$.

Тогда если $\beta_i = \sigma$, т.е. $L(\beta) = 1$, то $f(\beta) = 0$ в силу предположения.

Если же $\beta_i = \bar{\sigma}$, т.е. $L(\beta) = 0$, то $D(\beta) = 0$.

Но D является импликлентой f, поэтому $f(\beta) = 0$.

Значит, для любого набора $\beta \in E_2^n$ из $D_1(\beta) = 0$ следует $f(\beta) = 0$.

Следовательно, ЭД D_1 является импликлентой функции f.

Но ЭД D_1 — собственное сужение ЭД D, т.е. получаем противоречие.

Критерий простоты импликенты

2. *Достаточность*. Предположим обратное: пусть ЭД D не является простой импликентой функции f.

Значит, найдется некоторая импликента D_1 функции f, являющаяся собственным сужением ЭД D.

Пусть в ЭД D_1 отсутствует литерал $L(x_i) = x_i^\sigma$ из ЭД D.

Если $\alpha \in E_2^n$ набор для литерала L из ЭД D из утверждения теоремы, то $D_1(\alpha) = 0$.

Но D_1 — импликента функции f, значит, $f(\alpha) = 0$, т.е. получаем противоречие.

$\square$

Конъюнкция всех простых имплицент функции

Утверждение 1. *Конъюнкция K_f всех простых имплицент функции $f \in P_2$ является КНФ, которая представляет эту функцию f.*

Конъюнкция всех простых имплицент функции

Доказательство. Пусть $\alpha \in E_2^n$.

1. Если $f(\alpha) = 0$, то ЭД $x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$ является имплицентой функции f.

Значит, эта имплицента может быть сужена до некоторой простой имплиценты D функции f, при этом $D(\alpha) = 0$.

Поэтому $K_f(\alpha) = 0$.

Конъюнкция всех простых импликент функции

Доказательство.
2. Если же $f(\alpha) = 1$, то ни одна простая импликента функции f не может принимать на наборе α нулевое значение по определению импликенты функции, т.е. $K_f(\alpha) = 1$.

$\square$

Сокращенная КНФ

Конъюнкция K_f всех простых имплицент функции $f \in P_2$ называется ее **сокращенной** КНФ.

По определению для каждой функции $f \in P_2$ ее сокращенная КНФ K_f единственна.

Резольвента

Утверждение 2. *Если ЭД* $D_1 = x_i \vee D_1'$ *и* $D_2 = \bar{x}_i \vee D_2'$ *являются импликентами функции* $f \in P_2^{(n)}$, *то ЭД* $D = D_1' \vee D_2'$ *также является импликентой функции* f.

Доказательство. Если $\alpha \in E_2^n$ и $D(\alpha) = 0$, то $D_1'(\alpha) = 0$ и $D_2'(\alpha) = 0$.

Далее, если $\alpha_i = 0$, то $D_1(\alpha) = 0$, и если $\alpha_i = 1$, то $D_2(\alpha) = 0$.

Поэтому $f(\alpha) = 0$.

$\square$

Резольвента

Для ЭД $D_1 = x \vee D_1'$ и $D_2 = \bar{x} \vee D_2'$ ЭД $D = D_1' \vee D_2'$ называется их **резольвентой**.

Если D_1, D_2 — произвольные ЭД, то верно тождество

$$(x \vee D_1)(\bar{x} \vee D_2) = (x \vee D_1)(\bar{x} \vee D_2)(D_1 \vee D_2),$$

которое называется **правилом резолюции**.

Резольвента

Если K_f — сокращенная КНФ функции $f \in P_2$, то из утверждения 2 следует, что для любой пары ЭД, входящих в K_f, некоторое сужение их резольвенты тоже входит в K_f.

Следующая теорема 2 показывает, что обратное утверждение также верно.

Критерий сокращенности КНФ

Теорема 2. *Если для каждой пары ЭД, входящих в КНФ K функции $f \in P_2^{(n)}$, в КНФ K найдется сужение их резольвенты, то КНФ K является сокращенной КНФ функции f.*

Критерий сокращенности КНФ

Доказательство. Если $f = 1$, то теорема верна.

При $f \neq 1$ проведем доказательство от обратного: пусть условие теоремы выполнено, но найдется простая имплицента D_0 функции f, не входящая в КНФ K.

Построим множество $S(K, D_0)$ ЭД D с переменными $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) ЭД D_0 является сужением ЭД D;

2) ЭД D не содержится в КНФ K;

3) никакое сужение ЭД D не содержится в КНФ K.

Критерий сокращенности КНФ

Отметим некоторые свойства множества $S(K, D_0)$.

1. Множество $S(K, D_0)$ не является пустым, т.к. в него входит ЭД D_0.

2. Если $D \in S(K, D_0)$, то ЭД D — импликцента функции f, т.к. простая импликцента D_0 функции f является сужением ЭД D.

Критерий сокращенности КНФ

Выберем в множестве $S(K, D_0)$ такую ЭД D^*, которая не является сужением никакой другой ЭД из $S(K, D_0)$.

Заметим, что ЭД D^* не может иметь вид $x_1^{\bar{a}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{a}_n}$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n \in E_2$.

В самом деле, в обратном случае $D_0(\alpha) = 0$, где $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$, откуда $f(\alpha) = 0$.

Значит, некоторое сужение ЭД D^* обязано присутствовать в КНФ K, что противоречит вхождению ЭД D^* в $S(K, D_0)$.

Следовательно, в ЭД D^* отсутствуют литералы некоторой переменной, например, переменной x_1.

Критерий сокращенности КНФ

Значит, в КНФ K найдется ЭД D_1, имеющая вид $x_1 \vee D_1'$, где D_1' — сужение ЭД D^*.

Это выполняется, т.к. иначе ЭД $x_1 \vee D^*$, для которой ЭД D_0 является сужением, вошла бы в множество $S(K, D_0)$.

Аналогично, в КНФ K найдется ЭД D_2, имеющая вид $\bar{x}_1 \vee D_2'$, где D_2' — сужение ЭД D^*.

Но резольвента ЭД D_1 и D_2 имеет вид $D_1' \vee D_2'$, т.е. является сужением ЭД D^*.

По условию теоремы ее сужение обязано входить в КНФ K. Получаем противоречие с выбором ЭД D^*.

$\square$

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Из утверждения 2 и теоремы 2 извлекаем следующий способ построения сокращенной КНФ функции $f \in P_2$ по некоторой ее КНФ.

Далее в описаниях алгоритмов знак «$:=$» означает оператор присваивания, т.е. переменной слева от знака присваивается значение выражения справа от знака.

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Алгоритм 1. *Построение сокращенной КНФ функции $f \in P_2$ по КНФ.*

Вход: произвольная КНФ функции f.

Выход: сокращеннная КНФ K_f функции f.

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Алгоритм 1.

1. $K_0 := K$.

2. Если существует такая пара ЭД D_1, D_2 в K_0, что их резольвента D не поглощается ни одной ЭД из K_0, то $K_0 := K_0 \cdot D$ и (после выполнения всех поглощений в K_0) переход на 2.

3. Если такой пары ЭД не существует, то $K_f := K_0$ (по теореме 2).

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Отметим, что в алгоритме 1 выполняются тождественные преобразования исходной КНФ функции f:
1) переход от КНФ K_0 к КНФ $K_0 \cdot D$ — по правилу резолюции;
2) удаление всех ЭД, для которых ЭД D является сужением, — по правилу поглощения.

Значит, каждый раз КНФ K_0 представляет функцию f.

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Отметим, что алгоритм 1 всегда остановится через конечное число шагов, т.к. каждая возможная ЭД с переменными, от которых зависит функция f, может быть добавлена к КНФ функции f не более одного раза, а всего ЭД с заданными переменными — конечное число.

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Пример. Построим по алгоритму 1 сокращенную КНФ K_f функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P_2$ по ее КНФ

$$K = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_4).$$

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_4).$$

Рассмотрим 1-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим к K_0 их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_4)(x_2 \vee x_4).$$

После выполнения поглощений (поглощаемая ЭД выделена красным) получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_4).$$

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Пример. Итак,

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_4).$$

Рассмотрим 2-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим к K_0 их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_4) \cdot x_4.$$

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) получаем:

$$K_0 = (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot x_4.$$

Теперь ни для какой пары ЭД из K_0 не существует их резольвенты, поэтому алгоритм завершает свою работу, и

$$K_f = (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot x_4.$$

Элементарная конъюнкция

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}^{\sigma_r},$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in E_2$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ — различные переменные, называется **элементарной конъюнкцией** (ЭК) ранга r, $r \geqslant 1$.

Элементарной конъюнкцией ранга 0 назовем константу 1.

Считаем, что две ЭК совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них литералов.

Приведение к ЭК или к 0

Отметим, что любую конъюнкцию литералов или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести либо к некоторой ЭК, либо к константе 0.

Примем, что любая конъюнкция литералов или констант всегда приведена к соответствующей ЭК или константе 0.

Дизъюнктивная нормальная форма

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) длины l, $l \geqslant 1$, назовем дизъюнкцию l различных ЭК.

Дизъюнктивной нормальной формой длины 0 назовем константу 0.

Считаем, что две ДНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭК.

Приведение к ДНФ

Отметим, что любую дизъюнкцию ЭК или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести к некоторой ДНФ.

Примем, что любая дизъюнкция ЭК или констант всегда приведена к соответствующей ДНФ.

Совершенная ДНФ

Каждая ДНФ над переменными $x_1, \ldots, x_n$ определяет какую-то функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$.

Каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ может быть представлена какой-то ДНФ, а именно, если $f \neq 0$, то ее можно записать **совершенной** ДНФ:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\alpha \in E_2^n : f(\alpha) = 1} x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Дизъюнкция сокращенных КНФ

Теорема 3. *Если* $K_1 = \bigwedge_{j_1=1}^{l_1} D'_{j_1}$ *и* $K_2 = \bigwedge_{j_2=1}^{l_2} D''_{j_2}$ *— сокращенные КНФ функций* $f_1 \in P_2^{(n)}$ *и* $f_2 \in P_2^{(n)}$, *то КНФ*

$$K = \bigwedge_{j_1=1}^{l_1} \bigwedge_{j_2=1}^{l_2} (D'_{j_1} \vee D''_{j_2})$$

(*после выполнения всех возможных поглощений ЭД*) *является сокращенной КНФ функции* $f = f_1 \vee f_2 \in P_2^{(n)}$.

Дизъюнкция сокращенных КНФ

Доказательство. Пусть D — простая имплицента функции $f = f_1 \vee f_2$.

Значит, для любого $\alpha \in E_2^n$ из $D(\alpha) = 0$ следует

$$f(\alpha) = f_1(\alpha) \vee f_2(\alpha) = 0.$$

Следовательно, $f_1(\alpha) = 0$ и $f_2(\alpha) = 0$, т.е. D является имплицентой и функции f_1, и функции f_2.

Дизъюнкция сокращенных КНФ

Т.к. K_1 — сокращенная КНФ функции f_1, в ней найдется некоторая простая имплицента D_1 функции f_1, являющаяся сужением имплиценты D.

Аналогично, в КНФ K_2 найдется некоторая простая имплицента D_2 функции f_2, являющаяся сужением имплиценты D.

Следовательно, ЭД $D_1 \vee D_2$ входит в КНФ K.

ЭД $D_1 \vee D_2$ состоит только из литералов, содержащихся в ЭД D, поэтому является сужением D.

Но ЭД D является простой имплицентой функции f, поэтому $D_1 \vee D_2 = D$.

Значит, ЭД D входит в КНФ K.

$\square$

Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Т.к. произвольная ЭК является сокращенной КНФ, из теоремы 3 получаем следующий способ построения сокращенной КНФ функции $f \in P_2$ по некоторой ее ДНФ.

Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Алгоритм 2. *Построение сокращенной КНФ функции $f \in P_2$ по ДНФ.*

Вход: произвольная ДНФ $D = K_1 \vee \ldots \vee K_l$ функции f, $l \geqslant 2$.

Выход: сокращеннная КНФ K_f функции f.

Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Алгоритм 2.

1.1. $K_0 := K_1$.

1.j, $j = 2, \ldots, l$.

1) По сокращенной КНФ K_0 функции f_0 и сокращенной КНФ K_j функции f_j по теореме 3 строим сокращенную КНФ функции $f_0 \vee f_j$. Эту полученную сокращенную КНФ обозначаем как K_0.

2) Если $j < l$, то переходим к 1.(j+1).

3) Если $j = l$, то $K_f := K_0$.

Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Пример. Построим по алгоритму 2 сокращенную КНФ K_f функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P_2$ по ее ДНФ

$$D = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4.$$

Получаем:

$$\begin{array}{lcl} 1.1. \quad K_0 & = & \bar{x}_1\bar{x}_2. \\ 1.2. \quad K_0 & = & (\bar{x}_1)(\bar{x}_2) \vee (x_1)(\bar{x}_2)(x_4) = \\ & = & (\bar{x}_1 \vee x_1)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_1)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_2 \vee x_4). \end{array}$$

ЭД, выделенная синим, равна константе 1, ЭД, выделенная зеленым, равна $\bar{x}_2$, поэтому получаем (упорядочивая переменные в каждой ЭД):

$$1.2. \quad K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot \bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_4).$$

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) получаем:

$$1.2. \quad K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot \bar{x}_2.$$

Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Пример. Итак,

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot \bar{x}_2.$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} 1.3. \quad K_0 &= (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2) \vee (x_2)(\bar{x}_3)(x_4) = \\ &= (\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_4) \cdot \\ &\quad \cdot (\bar{x}_2 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4). \end{aligned}$$

ЭД, выделенная синим, равна константе 1, ЭД, выделенная зеленым, равна $\bar{x}_1 \vee x_4$, поэтому получаем (упорядочивая переменные в каждой ЭД):

$$\begin{aligned} 1.3. \quad K_0 &= (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot \\ &\quad \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4). \end{aligned}$$

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) получаем:

$$1.3. \quad K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Пример. Алгоритм завершает свою работу, и

$$K_f = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

КНФ K_f является сокращенной КНФ функции f.

Для КНФ K_f можно проверить условие из критерия сокращенности КНФ (теорема 2). В данном случае ни для какой пары ЭД из K_f не существует их резольвенты.

Конец лекции