

Лекция 2. Конъюнктивные нормальные формы.
Имплицента, простая имплицента функции.
Сокращенная КНФ функции алгебры логики.
Способы построения сокращенной КНФ.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

Литерал

Пусть

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \sigma = 0. \end{cases}$$

Выражение x^σ , где $\sigma \in E_2$, называется **литералом** (переменной x).

Если $\sigma = 1$, то литерал x^σ называется **положительным**, если $\sigma = 0$, то литерал x^σ называется **отрицательным**.

Элементарная дизъюнкция

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\sigma_r},$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in E_2$, x_{i_1}, \dots, x_{i_r} — различные переменные, называется **элементарной дизъюнкцией** (ЭД) ранга r , $r \geq 1$.

Элементарной дизъюнкцией ранга 0 назовем константу 0.

Считаем, что две ЭД совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них литералов.

Приведение к ЭД или к 1

Отметим, что любую дизъюнкцию литералов или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести либо к некоторой ЭД, либо к константе 1.

Примем, что любая дизъюнкция литералов или констант всегда приведена к соответствующей ЭД или константе 1.

Сужение ЭД

Если D_1, D_2 — ЭД, то D_1 называется **сужением** D_2 , если каждый литерал ЭД D_1 входит в ЭД D_2 .

Например, ЭД $D_1 = x_1 \vee \bar{x}_2$ является сужением ЭД $D_2 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$.

Сужение называется **собственным**, если ЭД при этом не совпадают.

Если ЭД D_1 является сужением ЭД D_2 , то D_2 называется **расширением** D_1 .

Сужение ЭД

Отметим, что ЭД D_1 является сужением ЭД D_2 тогда и только тогда, когда

- 1) $N_0(D_2) \subseteq N_0(D_1)$ (или $N_1(D_1) \subseteq N_1(D_2)$);
- 2) для любого $\alpha \in E^n$ из $D_2(\alpha) = 0$ следует $D_1(\alpha) = 0$;
- 3) $D_1 \cdot D_2 = D_1$ (выполняется **правило поглощения**).

Конъюнктивная нормальная форма

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) длины l , $l \geq 1$, назовем конъюнкцию l различных ЭД.

Конъюнктивной нормальной формой длины 0 назовем константу 1.

Считаем, что две КНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭД.

Приведение к КНФ

Отметим, что любую конъюнкцию ЭД или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести к некоторой КНФ.

Примем, что любая конъюнкция ЭД или констант всегда приведена к соответствующей КНФ.

Соглашения по КНФ

Каждая КНФ над переменными x_1, \dots, x_n определяет какую-то функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^{(n)}$.

Отметим, что если ЭД D_1 является сужением ЭД D_2 , то $D_1 \cdot D_2 = D_1$ (**правило поглощения**).

Поэтому если в некоторую КНФ входят такие ЭД D_1, D_2 , то ЭД D_2 можно удалить из этой КНФ меняя функцию, которую определяет эта КНФ.

При этом говорят, что ЭД D_1 **поглощает** ЭД D_2 в этой КНФ.

Считаем, что в любой КНФ **всегда выполнены все возможные поглощения**, т.е. в ней не найдутся такие две ЭД, что одна из них является сужением другой.

Совершенная КНФ

Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена какой-то КНФ, а именно, если $f \neq 1$, то ее можно записать **совершенной КНФ**:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\alpha \in E_2^n: f(\alpha)=0} (x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}).$$

Имплицента функции

Имплицента функции $f \in P_2$ называется такая ЭД D , что $N_0(D) \subseteq N_0(f)$.

Если к тому же никакое собственное сужение имплиценты D не является имплицентай функции f , то ЭД D называется **простой имплицентай** функции f .

Отметим, что ЭД D является имплицентай функции $f \in P_2^{(n)}$, если для любого набора $\alpha \in E_k^n$ из $D(\alpha) = 0$ следует $f(\alpha) = 0$.

Критерий простоты имплиценты

Теорема 1 (критерий простоты имплиценты). Пусть ЭД D — имплицента функции $f \in P_2^{(n)}$. ЭД D является простой имплицентой функции f тогда и только тогда, когда для каждого литерала $L(x_i)$ из D найдется такой набор $\alpha \in E_2^n$, обращающий литерал L в единицу и все другие литералы из D в ноль, что $f(\alpha) = 1$.

Критерий простоты имплиценты

Доказательство.

1. *Необходимость.* Пусть $D = L \vee D_1$ — простая имплицента функции f , где $L(x_i) = x_i^\sigma$, $\sigma \in E_2$, и D_1 — дизъюнкция всех остальных литералов ЭД D .

Предположим обратное: пусть для каждого такого набора $\alpha \in E_2^n$, для которого $L(\alpha) = 1$ и $D_1(\alpha) = 0$, выполняется $f(\alpha) = 0$.

Отметим, что при этом для каждого такого набора α верно $\alpha_i = \sigma$.

Критерий простоты имплиценты

Рассмотрим такой произвольный набор $\beta \in E_2^n$, что $D_1(\beta) = 0$.

Тогда если $\beta_i = \sigma$, т.е. $L(\beta) = 1$, то $f(\beta) = 0$ в силу предположения.

Если же $\beta_i = \bar{\sigma}$, т.е. $L(\beta) = 0$, то $D(\beta) = 0$.

Но D является имплицентай f , поэтому $f(\beta) = 0$.

Значит, для любого набора $\beta \in E_2^n$ из $D_1(\beta) = 0$ следует $f(\beta) = 0$.

Следовательно, ЭД D_1 является имплицентай функции f .

Но ЭД D_1 — собственное сужение ЭД D , т.е. получаем противоречие.

Критерий простоты имплиценты

2. *Достаточность.* Предположим обратное: пусть ЭД D не является простой имплицентовой функции f .

Значит, найдется некоторая имплицента D_1 функции f , являющаяся собственным сужением ЭД D .

Пусть в ЭД D_1 отсутствует литерал $L(x_i) = x_i^\sigma$ из ЭД D .

Если $\alpha \in E_2^n$ набор для литерала L из ЭД D из утверждения теоремы, то $D_1(\alpha) = 0$.

Но D_1 — имплицента функции f , значит, $f(\alpha) = 0$, т.е. получаем противоречие.



Конъюнкция всех простых имплицент функции

Утверждение 1. Конъюнкция K_f всех простых имплицент функции $f \in P_2$ является КНФ, которая представляет эту функцию f .

Конъюнкция всех простых имплицинт функции

Доказательство. Пусть $\alpha \in E_2^n$.

1. Если $f(\alpha) = 0$, то ЭД $x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$ является имплицентой функции f .

Значит, эта имплицента может быть сужена до некоторой простой имплиценты D функции f , при этом $D(\alpha) = 0$.

Поэтому $K_f(\alpha) = 0$.

Конъюнкция всех простых имплицент функции

Доказательство.

2. Если же $f(\alpha) = 1$, то ни одна простая имплицента функции f не может принимать на наборе α нулевое значение по определению имплиценты функции, т.е. $K_f(\alpha) = 1$.



Сокращенная КНФ

Конъюнкция K_f всех простых имплицентов функции $f \in P_2$ называется ее **сокращенной КНФ**.

По определению для каждой функции $f \in P_2$ ее сокращенная КНФ K_f единственна.

Резольвента

Утверждение 2. Если ЭД $D_1 = x_i \vee D'_1$ и $D_2 = \bar{x}_i \vee D'_2$ являются имплицентами функции $f \in P_2^{(n)}$, то ЭД $D = D'_1 \vee D'_2$ также является имплицентой функции f .

Доказательство. Если $\alpha \in E_2^n$ и $D(\alpha) = 0$, то $D'_1(\alpha) = 0$ и $D'_2(\alpha) = 0$.

Далее, если $\alpha_i = 0$, то $D_1(\alpha) = 0$, и если $\alpha_i = 1$, то $D_2(\alpha) = 0$.

Поэтому $f(\alpha) = 0$.



Резольвента

Для ЭД $D_1 = x \vee D'_1$ и $D_2 = \bar{x} \vee D'_2$ ЭД $D = D'_1 \vee D'_2$ называется их **резольвентой**.

Если D_1, D_2 — произвольные ЭД, то верно тождество

$$(x \vee D_1)(\bar{x} \vee D_2) = (x \vee D_1)(\bar{x} \vee D_2)(D_1 \vee D_2),$$

которое называется **правилом резолюции**.

Резольвента

Если K_f — сокращенная КНФ функции $f \in P_2$, то из утверждения 2 следует, что для любой пары ЭД, входящих в K_f , некоторое сужение их резольвенты тоже входит в K_f .

Следующая теорема 2 показывает, что обратное утверждение также верно.

Критерий сокращенности КНФ

Теорема 2. Если для каждой пары ЭД, входящих в КНФ K функции $f \in P_2^{(n)}$, в КНФ K найдется сужение их резольвенты, то КНФ K является сокращенной КНФ функции f .

Критерий сокращенности КНФ

Доказательство. Если $f = 1$, то теорема верна.

При $f \neq 1$ проведем доказательство от обратного: пусть условие теоремы выполнено, но найдется простая имплицента D_0 функции f , не входящая в КНФ K .

Построим множество $S(K, D_0)$ ЭД D с переменными x_1, \dots, x_n , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) ЭД D_0 является сужением ЭД D ;
- 2) ЭД D не содержится в КНФ K ;
- 3) никакое сужение ЭД D не содержится в КНФ K .

Критерий сокращенности КНФ

Отметим некоторые свойства множества $S(K, D_0)$.

1. Множество $S(K, D_0)$ не является пустым, т.к. в него входит ЭД D_0 .
2. Если $D \in S(K, D_0)$, то ЭД D — имплицента функции f , т.к. простая имплицента D_0 функции f является сужением ЭД D .

Критерий сокращенности КНФ

Выберем в множестве $S(K, D_0)$ такую ЭД D^* , которая не является сужением никакой другой ЭД из $S(K, D_0)$.

Заметим, что ЭД D^* не может иметь вид $x_1^{\bar{a}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{a}_n}$ для некоторых $a_1, \dots, a_n \in E_2$.

В самом деле, в обратном случае $D_0(\alpha) = 0$, где $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$, откуда $f(\alpha) = 0$.

Значит, некоторое сужение ЭД D^* обязано присутствовать в КНФ K , что противоречит вхождению ЭД D^* в $S(K, D_0)$.

Следовательно, в ЭД D^* отсутствуют литералы некоторой переменной, например, переменной x_1 .

Критерий сокращенности КНФ

Значит, в КНФ K найдется ЭД D_1 , имеющая вид $x_1 \vee D'_1$, где D'_1 — сужение ЭД D^* .

Это выполняется, т.к. иначе ЭД $x_1 \vee D^*$, для которой ЭД D_0 является сужением, вошла бы в множество $S(K, D_0)$.

Аналогично, в КНФ K найдется ЭД D_2 , имеющая вид $\bar{x}_1 \vee D'_2$, где D'_2 — сужение ЭД D^* .

Но резольвента ЭД D_1 и D_2 имеет вид $D'_1 \vee D'_2$, т.е. является сужением ЭД D^* .

По условию теоремы ее сужение обязано входить в КНФ K .
Получаем противоречие с выбором ЭД D^* .



Построение сокращенной КНФ по КНФ

Из утверждения 2 и теоремы 2 извлекаем следующий способ построения сокращенной КНФ функции $f \in P_2$ по некоторой ее КНФ.

Далее в описаниях алгоритмов знак «:=» означает оператор присваивания, т.е. переменной слева от знака присваивается значение выражения справа от знака.

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Алгоритм 1. *Построение сокращенной КНФ функции $f \in P_2$ по КНФ.*

Вход: произвольная КНФ функции f .

Выход: сокращенная КНФ K_f функции f .

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Алгоритм 1.

1. $K_0 := K$.
2. Если существует такая пара ЭД D_1, D_2 в K_0 , что их резольвента D не поглощается ни одной ЭД из K_0 , то $K_0 := K_0 \cdot D$ и (после выполнения всех поглощений в K_0) переход на 2.
3. Если такой пары ЭД не существует, то $K_f := K_0$ (по теореме 2).

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Отметим, что в алгоритме 1 выполняются тождественные преобразования исходной КНФ функции f :

- 1) переход от КНФ K_0 к КНФ $K_0 \cdot D$ — по правилу резолюции;
- 2) удаление всех ЭД, для которых ЭД D является сужением, — по правилу поглощения.

Значит, каждый раз КНФ K_0 представляет функцию f .

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Отметим, что алгоритм 1 всегда остановится через конечное число шагов, т.к. каждая возможная ЭД с переменными, от которых зависит функция f , может быть добавлена к КНФ функции f не более одного раза, а всего ЭД с заданными переменными — конечное число.

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Пример. Построим по алгоритму 1 сокращенную КНФ K_f функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P_2$ по ее КНФ

$$K = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_4).$$

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_4).$$

Рассмотрим 1-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим к K_0 их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_4)(x_2 \vee x_4).$$

После выполнения поглощений (поглощаемая ЭД выделена красным) получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_4).$$

Построение сокращенной КНФ по КНФ

Пример. Итак,

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_4).$$

Рассмотрим 2-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим к K_0 их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_4) \cdot x_4.$$

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) получаем:

$$K_0 = (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot x_4.$$

Теперь ни для какой пары ЭД из K_0 не существует их резольвенты, поэтому алгоритм завершает свою работу, и

$$K_f = (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot x_4.$$

Элементарная конъюнкция

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{i_r}^{\sigma_r},$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in E_2$, x_{i_1}, \dots, x_{i_r} — различные переменные, называется **элементарной конъюнкцией** (ЭК) ранга r , $r \geq 1$.

Элементарной конъюнкцией ранга 0 назовем константу 1.

Считаем, что две ЭК совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них литералов.

Приведение к ЭК или к 0

Отметим, что любую конъюнкцию литералов или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести либо к некоторой ЭК, либо к константе 0.

Примем, что любая конъюнкция литералов или констант всегда приведена к соответствующей ЭК или константе 0.

Дизъюнктивная нормальная форма

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) длины l , $l \geq 1$, назовем дизъюнкцию l различных ЭК.

Дизъюнктивной нормальной формой длины 0 назовем константу 0.

Считаем, что две ДНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭК.

Приведение к ДНФ

Отметим, что любую дизъюнкцию ЭК или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести к некоторой ДНФ.

Примем, что любая дизъюнкция ЭК или констант всегда приведена к соответствующей ДНФ.

Совершенная ДНФ

Каждая ДНФ над переменными x_1, \dots, x_n определяет какую-то функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$.

Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена какой-то ДНФ, а именно, если $f \neq 0$, то ее можно записать **совершенной ДНФ**:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\alpha \in E_2^n: f(\alpha)=1} x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Дизъюнкция сокращенных КНФ

Теорема 3. Если $K_1 = \prod_{j_1=1}^{l_1} D'_{j_1}$ и $K_2 = \prod_{j_2=1}^{l_2} D''_{j_2}$ — сокращенные КНФ функций $f_1 \in P_2^{(n)}$ и $f_2 \in P_2^{(n)}$, то КНФ

$$K = \prod_{j_1=1}^{l_1} \prod_{j_2=1}^{l_2} (D'_{j_1} \vee D''_{j_2})$$

(после выполнения всех возможных поглощений ЭД) является сокращенной КНФ функции $f = f_1 \vee f_2 \in P_2^{(n)}$.

Дизъюнкция сокращенных КНФ

Доказательство. Пусть D — простая имплицента функции $f = f_1 \vee f_2$.

Значит, для любого $\alpha \in E_2^n$ из $D(\alpha) = 0$ следует

$$f(\alpha) = f_1(\alpha) \vee f_2(\alpha) = 0.$$

Следовательно, $f_1(\alpha) = 0$ и $f_2(\alpha) = 0$, т.е. D является имплицентами и функции f_1 , и функции f_2 .

Дизъюнкция сокращенных КНФ

Т.к. K_1 — сокращенная КНФ функции f_1 , в ней найдется некоторая простая имплицента D_1 функции f_1 , являющаяся сужением имплиценты D .

Аналогично, в КНФ K_2 найдется некоторая простая имплицента D_2 функции f_2 , являющаяся сужением имплиценты D .

Следовательно, ЭД $D_1 \vee D_2$ входит в КНФ K .

ЭД $D_1 \vee D_2$ состоит только из литералов, содержащихся в ЭД D , поэтому является сужением D .

Но ЭД D является простой имплицентой функции f , поэтому $D_1 \vee D_2 = D$.

Значит, ЭД D входит в КНФ K .



Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Т.к. произвольная ЭК является сокращенной КНФ, из теоремы 3 получаем следующий способ построения сокращенной КНФ функции $f \in P_2$ по некоторой ее ДНФ.

Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Алгоритм 2. *Построение сокращенной КНФ функции $f \in P_2$ по ДНФ.*

Вход: произвольная ДНФ $D = K_1 \vee \dots \vee K_l$ функции f , $l \geq 2$.

Выход: сокращенная КНФ K_f функции f .

Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Алгоритм 2.

1.1. $K_0 := K_1$.

1.j, $j = 2, \dots, l$.

1) По сокращенной КНФ K_0 функции f_0 и сокращенной КНФ K_j функции f_j по теореме 3 строим сокращенную КНФ функции $f_0 \vee f_j$. Эту полученную сокращенную КНФ обозначаем как K_0 .

2) Если $j < l$, то переходим к 1.(j+1).

3) Если $j = l$, то $K_f := K_0$.

Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Пример. Построим по алгоритму 2 сокращенную КНФ K_f функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P_2$ по ее ДНФ

$$K = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4.$$

Получаем:

$$1.1. K_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2.$$

$$1.2. K_0 = (\bar{x}_1)(\bar{x}_2) \vee (x_1)(\bar{x}_2)(x_4) = \\ = (\bar{x}_1 \vee x_1)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_1)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

ЭД, выделенная синим, равна константе 1, ЭД, выделенная зеленым, равна \bar{x}_2 , поэтому получаем (упорядочивая переменные в каждой ЭД):

$$1.2. K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot \bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_4).$$

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) получаем:

$$1.2. K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot \bar{x}_2.$$

Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Пример. Итак,

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot \bar{x}_2.$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} 1.3. \quad K_0 &= (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2) \vee (x_2)(\bar{x}_3)(x_4) = \\ &= (\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_4) \cdot \\ &\quad \cdot (\bar{x}_2 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4). \end{aligned}$$

ЭД, выделенная синим, равна константе 1, ЭД, выделенная зеленым, равна $\bar{x}_1 \vee x_4$, поэтому получаем (упорядочивая переменные в каждой ЭД):

$$\begin{aligned} 1.3. \quad K_0 &= (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot \\ &\quad \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4). \end{aligned}$$

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) получаем:

$$1.3. \quad K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Пример. Алгоритм завершает свою работу, и

$$K_f = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

КНФ K_f является сокращенной КНФ функции f .

Для КНФ K_f можно проверить условие из критерия сокращенности КНФ (теорема 2). В данном случае ни для какой пары ЭД из K_f не существует их резольвенты.

Конец лекции