

Лекция 2. Конъюнктивные нормальные формы.  
Имплицента, простая имплицента функции.  
Сокращенная КНФ функции алгебры логики.  
Способы построения сокращенной КНФ.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна  
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

# Литерал

Пусть

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \sigma = 0. \end{cases}$$

Выражение  $x^\sigma$ , где  $\sigma \in E_2$ , называется **литералом** (переменной  $x$ ).

Если  $\sigma = 1$ , то литерал  $x^\sigma$  называется **положительным**, если  $\sigma = 0$ , то литерал  $x^\sigma$  называется **отрицательным**.

# Элементарная дизъюнкция

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\sigma_r},$$

где  $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in E_2$ ,  $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$  — различные переменные, называется **элементарной дизъюнкцией** (ЭД) ранга  $r$ ,  $r \geq 1$ .

**Элементарной дизъюнкцией** ранга 0 назовем константу 0.

Считаем, что две ЭД совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них литералов.

# Приведение к ЭД или к 1

Отметим, что любую дизъюнкцию литералов или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести либо к некоторой ЭД, либо к константе 1.

Примем, что любая дизъюнкция литералов или констант всегда приведена к соответствующей ЭД или константе 1.

## Сужение ЭД

Если  $D_1, D_2$  — ЭД, то  $D_1$  называется **сужением**  $D_2$ , если каждый литерал ЭД  $D_1$  входит в ЭД  $D_2$ .

**Например**, ЭД  $D_1 = x_1 \vee \bar{x}_2$  является сужением ЭД  $D_2 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$ .

Сужение называется **собственным**, если ЭД при этом не совпадают.

Если ЭД  $D_1$  является сужением ЭД  $D_2$ , то  $D_2$  называется **расширением**  $D_1$ .

# Сужение ЭД

Отметим, что ЭД  $D_1$  является сужением ЭД  $D_2$  тогда и только тогда, когда

- 1)  $N_0(D_2) \subseteq N_0(D_1)$  (или  $N_1(D_1) \subseteq N_1(D_2)$ );
- 2) для любого  $\alpha \in E_2^n$  из  $D_2(\alpha) = 0$  следует  $D_1(\alpha) = 0$ ;
- 3)  $D_1 \cdot D_2 = D_1$  (выполняется **правило поглощения**).

# Конъюнктивная нормальная форма

**Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) длины  $l$ ,  $l \geq 1$ , назовем конъюнкцию  $l$  различных ЭД.**

**Конъюнктивной нормальной формой длины 0 назовем константу 1.**

Считаем, что две КНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭД.

## Приведение к КНФ

Отметим, что любую конъюнкцию ЭД или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести к некоторой КНФ.

Примем, что любая конъюнкция ЭД или констант всегда приведена к соответствующей КНФ.



## Соглашения по КНФ

Каждая КНФ над переменными  $x_1, \dots, x_n$  определяет какую-то функцию  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^{(n)}$ .

Отметим, что если ЭД  $D_1$  является сужением ЭД  $D_2$ , то  $D_1 \cdot D_2 = D_1$  (**правило поглощения**).

Поэтому если в некоторую КНФ входят такие ЭД  $D_1, D_2$ , то ЭД  $D_2$  можно удалить из этой КНФ не изменяя функцию, которую определяет эта КНФ.

При этом говорят, что ЭД  $D_1$  **поглощает** ЭД  $D_2$  в этой КНФ.

Считаем, что в любой КНФ **всегда выполнены все возможные поглощения**, т.е. в ней не найдутся такие две ЭД, что одна из них является сужением другой.

# Совершенная КНФ

Каждая функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$  может быть представлена какой-то КНФ, а именно, если  $f \neq 1$ , то ее можно записать **совершенной** КНФ:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\alpha \in E_2^n: f(\alpha)=0} (x_1^{\bar{\alpha}(1)} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}(n)}).$$

# Имплицента функции

**Имплицентой** функции  $f \in P_2$  называется такая ЭД  $D$ , что  $N_0(D) \subseteq N_0(f)$ .

Если к тому же никакое собственное сужение имплиценты  $D$  не является имплицентой функции  $f$ , то ЭД  $D$  называется **простой имплицентой** функции  $f$ .

Отметим, что ЭД  $D$  является имплицентой функции  $f \in P_2^{(n)}$ , если для любого набора  $\alpha \in E_k^n$  из  $D(\alpha) = 0$  следует  $f(\alpha) = 0$ .

# Критерий простоты имплиценты

**Теорема 1 (критерий простоты имплиценты).** Пусть ЭД  $D$  — имплицента функции  $f \in P_2^{(n)}$ . ЭД  $D$  является простой имплицентой функции  $f$  тогда и только тогда, когда для каждого литерала  $L(x_i)$  из  $D$  найдется такой набор  $\alpha \in E_2^n$ , обращающий литерал  $L$  в единицу и все другие литералы из  $D$  в ноль, что  $f(\alpha) = 1$ .

# Критерий простоты имплиценты

## Доказательство.

1. *Необходимость.* Пусть  $D = L \vee D_1$  — простая имплицента функции  $f$ , где  $L(x_i) = x_i^\sigma$ ,  $\sigma \in E_2$ , и  $D_1$  — дизъюнкция всех остальных литералов ЭД  $D$ .

Предположим противное: пусть для каждого такого набора  $\alpha \in E_2^n$ , для которого  $L(\alpha) = 1$  и  $D_1(\alpha) = 0$ , выполняется  $f(\alpha) = 0$ .

Отметим, что при этом для каждого такого набора  $\alpha$  верно  $\alpha(i) = \sigma$ .

## Критерий простоты имплиценты

Рассмотрим такой произвольный набор  $\beta \in E_2^n$ , что  $D_1(\beta) = 0$ .

Тогда если  $\beta(i) = \sigma$ , т.е.  $L(\beta) = 1$ , то  $f(\beta) = 0$  в силу предположения.

Если же  $\beta(i) = \bar{\sigma}$ , т.е.  $L(\beta) = 0$ , то  $D(\beta) = 0$ .

Но  $D$  является имплицентай  $f$ , поэтому  $f(\beta) = 0$ .

Значит, для любого набора  $\beta \in E_2^n$  из  $D_1(\beta) = 0$  следует  $f(\beta) = 0$ .

Следовательно, ЭД  $D_1$  является имплицентай функции  $f$ .

Но ЭД  $D_1$  — собственное сужение ЭД  $D$ , т.е. получаем противоречие.

## Критерий простоты имплиценты

2. *Достаточность.* Предположим противное: пусть ЭД  $D$  не является простой имплицентов функции  $f$ .

Значит, найдется некоторая имплицента  $D_1$  функции  $f$ , являющаяся собственным сужением ЭД  $D$ .

Пусть в ЭД  $D_1$  отсутствует литерал  $L(x_i) = x_i^\sigma$  из ЭД  $D$ .

Если  $\alpha \in E_2^n$  набор для литерала  $L$  из ЭД  $D$  из утверждения теоремы, то  $D_1(\alpha) = 0$ .

Но  $D_1$  — имплицента функции  $f$ , значит,  $f(\alpha) = 0$ , т.е. получаем противоречие.



# Конъюнкция всех простых имплицент функции

**Утверждение 1.** Конъюнкция  $K_f$  всех простых имплицент функции  $f \in P_2$  является КНФ, которая представляет эту функцию  $f$ .



# Конъюнкция всех простых имплицинт функции

**Доказательство.** Пусть  $\alpha \in E_2^n$ .

1. Если  $f(\alpha) = 0$ , то ЭД  $x_1^{\bar{\alpha}(1)} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}(n)}$  является имплицентой функции  $f$ .

Значит, эта имплицента может быть сужена до некоторой простой имплиценты  $D$  функции  $f$ , при этом  $D(\alpha) = 0$ .

Поэтому  $K_f(\alpha) = 0$ .

# Конъюнкция всех простых имплицинт функции

**Доказательство.**

2. Если же  $f(\alpha) = 1$ , то ни одна простая имплицинта функции  $f$  не может принимать на наборе  $\alpha$  нулевое значение по определению имплицинты функции, т.е.  $K_f(\alpha) = 1$ .

□

## Сокращенная КНФ

Конъюнкция  $K_f$  всех простых имплицентов функции  $f \in P_2$  называется ее **сокращенной КНФ**.

По определению для каждой функции  $f \in P_2$  ее сокращенная КНФ  $K_f$  единственна.

# Резольвента

**Утверждение 2.** Если ЭД  $D_1 = x_i \vee D'_1$  и  $D_2 = \bar{x}_i \vee D'_2$  являются имплицентами функции  $f \in P_2^{(n)}$ , то ЭД  $D = D'_1 \vee D'_2$  также является имплицентами функции  $f$ .

**Доказательство.** Если  $\alpha \in E_2^n$  и  $D(\alpha) = 0$ , то  $D'_1(\alpha) = 0$  и  $D'_2(\alpha) = 0$ .

Далее, если  $\alpha(i) = 0$ , то  $D_1(\alpha) = 0$ , и если  $\alpha(i) = 1$ , то  $D_2(\alpha) = 0$ .

Поэтому  $f(\alpha) = 0$ .



# Резольвента

Для ЭД  $D_1 = x \vee D'_1$  и  $D_2 = \bar{x} \vee D'_2$  ЭД  $D = D'_1 \vee D'_2$  называется их **резольвентой**.

Если  $D_1, D_2$  — произвольные ЭД, то верно тождество

$$(x \vee D_1)(\bar{x} \vee D_2) = (x \vee D_1)(\bar{x} \vee D_2)(D_1 \vee D_2),$$

которое называется **правилом резолюции**.

# Резольвента

Если  $K_f$  — сокращенная КНФ функции  $f \in P_2$ , то из утверждения 2 следует, что для любой пары ЭД, входящих в  $K_f$ , некоторое сужение их резольвенты тоже входит в  $K_f$ .

Следующая теорема 2 показывает, что обратное утверждение также верно.

## Критерий сокращенности КНФ

**Теорема 2.** Если для каждой пары ЭД, входящих в КНФ  $K$  функции  $f \in P_2^{(n)}$ , в КНФ  $K$  найдется сужение их резольвенты, то КНФ  $K$  является сокращенной КНФ функции  $f$ .

## Критерий сокращенности КНФ

**Доказательство.** Если  $f = 1$ , то теорема верна.

При  $f \neq 1$  проведем доказательство от противного: пусть условие теоремы выполнено, но найдется простая имплицента  $D_0$  функции  $f$ , не входящая в КНФ  $K$ .

Построим множество  $S(K, D_0)$  ЭД  $D$  с переменными  $x_1, \dots, x_n$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) ЭД  $D_0$  является сужением ЭД  $D$ ;
- 2) ЭД  $D$  не содержится в КНФ  $K$ ;
- 3) никакое сужение ЭД  $D$  не содержится в КНФ  $K$ .



# Критерий сокращенности КНФ

Отметим некоторые свойства множества  $S(K, D_0)$ .

1. Множество  $S(K, D_0)$  не является пустым, т.к. в него входит ЭД  $D_0$ .
2. Если  $D \in S(K, D_0)$ , то ЭД  $D$  — имплицента функции  $f$ , т.к. простая имплицента  $D_0$  функции  $f$  является сужением ЭД  $D$ .

## Критерий сокращенности КНФ

Выберем в множестве  $S(K, D_0)$  такую ЭД  $D^*$ , которая не является сужением никакой другой ЭД из  $S(K, D_0)$ .

Заметим, что ЭД  $D^*$  не может иметь вид  $x_1^{\bar{a}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{a}_n}$  для некоторых  $a_1, \dots, a_n \in E_2$ .

В самом деле, в противном случае  $D_0(\alpha) = 0$ , где  $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$ , откуда  $f(\alpha) = 0$ .

Значит, некоторое сужение ЭД  $D^*$  обязано присутствовать в КНФ  $K$ , что противоречит вхождению ЭД  $D^*$  в  $S(K, D_0)$ .

Следовательно, в ЭД  $D^*$  отсутствуют литералы некоторой переменной, например, переменной  $x_1$ .

## Критерий сокращенности КНФ

Значит, в КНФ  $K$  найдется ЭД  $D_1$ , имеющая вид  $x_1 \vee D'_1$ , где  $D'_1$  — сужение ЭД  $D^*$ .

Это выполняется, т.к. иначе ЭД  $x_1 \vee D^*$ , для которой ЭД  $D_0$  является сужением, вошла бы в множество  $S(K, D_0)$ .

Аналогично, в КНФ  $K$  найдется ЭД  $D_2$ , имеющая вид  $\bar{x}_1 \vee D'_2$ , где  $D'_2$  — сужение ЭД  $D^*$ .

Но резольвента ЭД  $D_1$  и  $D_2$  имеет вид  $D'_1 \vee D'_2$ , т.е. является сужением ЭД  $D^*$ .

По условию теоремы ее сужение обязано входить в КНФ  $K$ .  
Получаем противоречие с выбором ЭД  $D^*$ .



## Построение сокращенной КНФ по КНФ

Из утверждения 2 и теоремы 2 извлекаем следующий способ построения сокращенной КНФ функции  $f \in P_2$  по некоторой ее КНФ.

Далее в описаниях алгоритмов знак «:=» означает оператор присваивания, т.е. переменной слева от знака присваивается значение выражения справа от знака.

## Построение сокращенной КНФ по КНФ

**Алгоритм 1.** *Построение сокращенной КНФ функции  $f \in P_2$  по КНФ.*

*Вход:* произвольная КНФ функции  $f$ .

*Выход:* сокращенная КНФ  $K_f$  функции  $f$ .

# Построение сокращенной КНФ по КНФ

## Алгоритм 1.

1.  $K_0 := K$ .
2. Если существует такая пара ЭД  $D_1, D_2$  в  $K_0$ , что их резольвента  $D$  не поглощается ни одной ЭД из  $K_0$ , то  $K_0 := K_0 \cdot D$  и (после выполнения всех поглощений в  $K_0$ ) переход на 2.
3. Если такой пары ЭД не существует, то  $K_f := K_0$  (по теореме 2).

## Построение сокращенной КНФ по КНФ

Отметим, что в алгоритме 1 выполняются тождественные преобразования исходной КНФ функции  $f$ :

- 1) переход от КНФ  $K_0$  к КНФ  $K_0 \cdot D$  — по правилу резолюции;
- 2) удаление всех ЭД, для которых ЭД  $D$  является сужением, — по правилу поглощения.

Значит, каждый раз КНФ  $K_0$  представляет функцию  $f$ .

## Построение сокращенной КНФ по КНФ

Отметим, что алгоритм 1 всегда остановится через конечное число шагов, т.к. каждая возможная ЭД с переменными, от которых зависит функция  $f$ , может быть добавлена к КНФ функции  $f$  не более одного раза, а всего ЭД с заданными переменными — конечное число.



## Построение сокращенной КНФ по КНФ

**Пример.** Построим по алгоритму 1 сокращенную КНФ  $K_f$  функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P_2$  по ее КНФ

$$K = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_4).$$

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_4).$$

Рассмотрим 1-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим к  $K_0$  их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_4)(x_2 \vee x_4).$$

После выполнения поглощений (поглощаемая ЭД выделена красным) получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_4).$$

## Построение сокращенной КНФ по КНФ

**Пример.** Итак,

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_4).$$

Рассмотрим 2-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим к  $K_0$  их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_4) \cdot x_4.$$

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) получаем:

$$K_0 = (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot x_4.$$

Теперь ни для какой пары ЭД из  $K_0$  не существует их резольвенты, поэтому алгоритм завершает свою работу, и

$$K_f = (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot x_4.$$

# Элементарная конъюнкция

Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{i_r}^{\sigma_r},$$

где  $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in E_2$ ,  $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$  — различные переменные, называется **элементарной конъюнкцией (ЭК)** ранга  $r$ ,  $r \geq 1$ .

**Элементарной конъюнкцией** ранга 0 назовем константу 1.

Считаем, что две ЭК совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них литералов.

## Приведение к ЭК или к 0

Отметим, что любую конъюнкцию литералов или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести либо к некоторой ЭК, либо к константе 0.

Примем, что любая конъюнкция литералов или констант всегда приведена к соответствующей ЭК или константе 0.

# Дизъюнктивная нормальная форма

**Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) длины  $l$ ,  $l \geq 1$ , назовем дизъюнкцию  $l$  различных ЭК.**

**Дизъюнктивной нормальной формой длины  $0$  назовем константу  $0$ .**

Считаем, что две ДНФ совпадают, если они отличаются только порядком входящих в них ЭК.

## Приведение к ДНФ

Отметим, что любую дизъюнкцию ЭК или констант при помощи тождественных преобразований алгебры логики можно привести к некоторой ДНФ.

Примем, что любая дизъюнкция ЭК или констант всегда приведена к соответствующей ДНФ.

# Совершенная ДНФ

Каждая ДНФ над переменными  $x_1, \dots, x_n$  определяет какую-то функцию  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ .

Каждая функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$  может быть представлена какой-то ДНФ, а именно, если  $f \neq 0$ , то ее можно записать **совершенной ДНФ**:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\alpha \in E_2^n: f(\alpha)=1} x_1^{\alpha(1)} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha(n)}.$$

# Дизъюнкция сокращенных КНФ

**Теорема 3.** Если  $K_1 = \prod_{j_1=1}^{l_1} D'_{j_1}$  и  $K_2 = \prod_{j_2=1}^{l_2} D''_{j_2}$  — сокращенные КНФ функций  $f_1 \in P_2^{(n)}$  и  $f_2 \in P_2^{(n)}$ , то КНФ

$$K = \prod_{j_1=1}^{l_1} \prod_{j_2=1}^{l_2} (D'_{j_1} \vee D''_{j_2})$$

(после выполнения всех возможных поглощений ЭД) является сокращенной КНФ функции  $f = f_1 \vee f_2 \in P_2^{(n)}$ .



# Дизъюнкция сокращенных КНФ

**Доказательство.** Пусть  $D$  — простая имплицента функции  $f = f_1 \vee f_2$ .

Значит, для любого  $\alpha \in E_2^n$  из  $D(\alpha) = 0$  следует

$$f(\alpha) = f_1(\alpha) \vee f_2(\alpha) = 0.$$

Следовательно,  $f_1(\alpha) = 0$  и  $f_2(\alpha) = 0$ , т.е.  $D$  является имплицентами и функции  $f_1$ , и функции  $f_2$ .

## Дизъюнкция сокращенных КНФ

Т.к.  $K_1$  — сокращенная КНФ функции  $f_1$ , в ней найдется некоторая простая имплицента  $D_1$  функции  $f_1$ , являющаяся сужением имплиценты  $D$ .

Аналогично, в КНФ  $K_2$  найдется некоторая простая имплицента  $D_2$  функции  $f_2$ , являющаяся сужением имплиценты  $D$ .

Следовательно, ЭД  $D_1 \vee D_2$  входит в КНФ  $K$ .

ЭД  $D_1 \vee D_2$  состоит только из литералов, содержащихся в ЭД  $D$ , поэтому является сужением  $D$ .

Но ЭД  $D$  является простой имплицентой функции  $f$ , поэтому  $D_1 \vee D_2 = D$ .

Значит, ЭД  $D$  входит в КНФ  $K$ .



## Построение сокращенной КНФ по ДНФ

Т.к. произвольная ЭК является сокращенной КНФ, из теоремы 3 получаем следующий способ построения сокращенной КНФ функции  $f \in P_2$  по некоторой ее ДНФ.

## Построение сокращенной КНФ по ДНФ

**Алгоритм 2.** *Построение сокращенной КНФ функции  $f \in P_2$  по ДНФ.*

*Вход:* произвольная ДНФ  $D = K_1 \vee \dots \vee K_l$  функции  $f$ ,  $l \geq 2$ .

*Выход:* сокращенная КНФ  $K_f$  функции  $f$ .

# Построение сокращенной КНФ по ДНФ

## Алгоритм 2.

1.1.  $K_0 := K_1$ .

1.j,  $j = 2, \dots, l$ .

1) По сокращенной КНФ  $K_0$  функции  $f_0$  и сокращенной КНФ  $K_j$  функции  $f_j$  по теореме 3 строим сокращенную КНФ функции  $f_0 \vee f_j$ . Эту полученную сокращенную КНФ обозначаем как  $K_0$ .

2) Если  $j < l$ , то переходим к 1.(j+1).

3) Если  $j = l$ , то  $K_f := K_0$ .

## Построение сокращенной КНФ по ДНФ

**Пример.** Построим по алгоритму 2 сокращенную КНФ  $K_f$  функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P_2$  по ее ДНФ

$$K = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4.$$

Получаем:

$$1.1. \quad K_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2.$$

$$1.2. \quad K_0 = (\bar{x}_1)(\bar{x}_2) \vee (x_1)(\bar{x}_2)(x_4) = \\ = (\bar{x}_1 \vee x_1)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_1)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

ЭД, выделенная синим, равна константе 1, ЭД, выделенная зеленым, равна  $\bar{x}_2$ , поэтому получаем (упорядочивая переменные в каждой ЭД):

$$1.2. \quad K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot \bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_4).$$

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) получаем:

$$1.2. \quad K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot \bar{x}_2.$$

# Построение сокращенной КНФ по ДНФ

**Пример.** Итак,

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot \bar{x}_2.$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} 1.3. \quad K_0 &= (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2) \vee (x_2)(\bar{x}_3)(x_4) = \\ &= (\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_4) \cdot \\ &\quad \cdot (\bar{x}_2 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4). \end{aligned}$$

ЭД, выделенная синим, равна константе 1, ЭД, выделенная зеленым, равна  $\bar{x}_1 \vee x_4$ , поэтому получаем (упорядочивая переменные в каждой ЭД):

$$\begin{aligned} 1.3. \quad K_0 &= (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_4) \cdot \\ &\quad \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4). \end{aligned}$$

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) получаем:

$$1.3. \quad K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

## Построение сокращенной КНФ по ДНФ

**Пример.** Алгоритм завершает свою работу, и

$$K_f = (\bar{x}_1 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

КНФ  $K_f$  является сокращенной КНФ функции  $f$ .

Для КНФ  $K_f$  можно проверить условие из критерия сокращенности КНФ (теорема 2). В данном случае ни для какой пары ЭД из  $K_f$  не существует их резольвенты.



Конец лекции