Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 42

Арифметика Пресбургера

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Арифметика Пресбургера

$Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, \mathbf{s}; =]$ — эта интерпретация оказалась непростой:

- её теория обязательно или неполна, или неперечислима
- не существует алгоритма, проверяющего справедливость арифметических теорем в этой сигнатуре

Попробуем посмотреть,
насколько упростится интерпретация, если *слегка* сузить сигнатуру

Напоминание: арифметика Пресбургера (АП) — это
полная теория интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \mathbf{s}; =]$

В определении формальной арифметики,
в отличие от арифметики Пресбургера, не было требования **полноты** —
это намёк на то, что существуют «полезные» полные теории
арифметической интерпретации без умножения

Теорема. **Арифметика Пресбургера разрешима**

Разрешимость АП (доказательство)

Ar — так будем обозначать в доказательстве интерпретацию $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \mathbf{s}; =]$

Рассмотрим произвольную АП $\mathcal{T}$

Так как теория $\mathcal{T}$ полна и $Ar \models \mathcal{T}$, для любой формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ верно

$$\models_{\mathcal{T}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad Ar \models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\, \varphi$$

Значит, чтобы показать разрешимость $\mathcal{T}$, достаточно предоставить алгоритм проверки истинности произвольного предложения φ в Ar

Разрешимость АП (доказательство)

Заметим (вспомнив и теорему о подстановке определения), что в Ar выразимы следующие понятия:

- Заданное число α, $\alpha \in \mathbb{N}_0$:
$$y = \underbrace{\mathbf{s}(\mathbf{s}(\ldots\mathbf{s}}_{\alpha \text{ раз}}(0)\ldots))$$
- Операция $\beta \cdot \_$ умножения на заданное число β, $\beta \in \mathbb{N}_0$:
$$y = \underbrace{x_1 + x_1 + \cdots + x_1}_{\beta \text{ раз}}$$
- Отношение $\_ > \_$:
$$\exists z\,(x_1 = x_2 + z \,\&\, \neg(z = 0))$$
- Отношение $\_ \equiv_\gamma \_$ равенства чисел по заданному модулю γ, $\gamma \in \mathbb{N}$:
$$\exists z\,(x_1 + \gamma \cdot z = x_2 \vee x_2 + \gamma \cdot z = x_1)$$
- Отношения $\geq$, $<$, $\leq$, $\neq$, $\not\equiv_\gamma$:
$$x_1 > x_2 \vee x_1 = x_2 \qquad x_2 > x_1 \qquad x_2 \geq x_1 \qquad \neg(x_1 = x_2) \qquad \neg(x_1 \equiv_\gamma x_2)$$

По теореме о подстановке определения, достаточно предоставить алгоритм проверки истинности произвольного предложения φ в интерпретации $\overline{Ar}$, полученной из Ar добавлением этих понятий

Разрешимость АП (доказательство)

$\overline{Ar} \models \varphi$?

Самый простой случай: φ — атомарное предложение

Тогда проверка соотношения $\overline{Ar} \models \varphi$ — это проверка того, входят ли чи́сла, являющиеся значениями выражений над $\mathbb{N}_0$, $+$, $\mathbf{s}$ и $\beta \cdot \_$, в заданное отношение: $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, $=$, $\neq$, $\equiv_\alpha$ или $\not\equiv_\alpha$

Алгоритмы вычисления значений таких выражений
и проверки таких соотношений вам должны быть уже знакомы

Разрешимость АП (доказательство)

$$\overline{Ar} \models \varphi\ ?$$

Будем называть формулу бескванторной,
если она не содержит ни одного квантора

Простой случай: φ — бескванторное предложение

Тогда проверку соотношения $\overline{Ar} \models \varphi$ можно устроить так (рекурсивно):

- $\varphi = \psi_1 \,\&\, \psi_2$:
$$\overline{Ar} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Ar} \models \psi_1 \text{ и } \overline{Ar} \models \psi_2$$
- $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$:
$$\overline{Ar} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Ar} \models \psi_1 \text{ или } \overline{Ar} \models \psi_2$$
- $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$:
$$\overline{Ar} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Ar} \not\models \psi_1 \text{ или } \overline{Ar} \models \psi_2$$
- $\varphi = \neg\psi_1$:
$$\overline{Ar} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Ar} \not\models \psi_1$$
- φ — атом: это самый простой случай

Разрешимость АП (доказательство)

$$\overline{Ar} \models \varphi \text{ ?}$$

Общий случай: φ — произвольное предложение

Покажем, как можно *свести* общий случай к простому:
преобразовать φ в бескванторное предложение ψ, такое что

$$\overline{Ar} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Ar} \models \psi$$

Лемма (об элиминации квантора $\exists$). Для любой формулы вида $\exists \mathtt{x}\, \varphi(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, где φ — бескванторная формула, существует бескванторная формула $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, реализующая в $\overline{Ar}$ то же отношение

Лемма об элиминации квантора $\exists$ (доказательство)

$$\exists \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \rightsquigarrow \psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$$

Используя основные равносильности, можно:

- преобразовать φ в равносильную дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ):
$$\varphi \sim \exists \mathrm{x}\ (L_1 \,\&\, \ldots \,\&\, L_p \vee L'_1 \,\&\, \ldots \,\&\, L'_q \vee \ldots)$$
- вынести за квантор слагаемые ДНФ, не содержащие x:
$$\exists \mathrm{x}\ (\chi_2(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \vee \chi_1(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})) \sim \exists \mathrm{x}\ (\chi_1(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \vee \chi_2(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})) \sim \chi_1(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) \vee \exists \mathrm{x}\ \chi_2(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$$
- распространить квантор по слагаемым, оставшимся в ДНФ:
$$\exists \mathrm{x}\ (K_1 \vee \cdots \vee K_m) \sim \exists \mathrm{x}\ K_1 \vee \cdots \vee \exists \mathrm{x}\ K_m$$

Осталось показать, как преобразовать каждую формулу $\exists \mathrm{x}\ K_i(\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ в бескванторную формулу $\psi_i(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, реализующую то же отношение в $\overline{Ar}$

Лемма об элиминации квантора $\exists$ (доказательство)

$$\exists \mathtt{x}\ K_i(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \rightsquigarrow \psi_i(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

K_i — это слагаемое ДНФ, то есть конъюнкция атомов и их отрицаний

Заме́ним каждое отрицание атома в K_i
на атом с противоположным отношением:

$$\neg(t_1 < t_2) \text{ — на } t_1 \geq t_2,$$
$$\neg(t_1 = t_2) \text{ — на } t_1 \neq t_2,$$
$$\dots$$

В результате получится конъюнкция атомов K_i',
реализующая то же отношение, что и K_i

Арифметический смысл такой конъюнкции атомов — это
система линейных (не)равенств Σ над переменными $\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$

Осталось показать, как можно спроектировать Σ по переменной $\mathtt{x}$:
преобразовать Σ в совокупность Δ систем над $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ так,
чтобы набор $(a_1, \dots, a_n)$ был решением Δ тогда и только тогда,
когда существует число a, такое что $(a, a_1, \dots, a_n)$ — решение системы Σ

Лемма об элиминации квантора $\exists$ (доказательство)

$$\Sigma(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \overset{\exists \mathtt{x}}{\rightsquigarrow} \Delta(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

Равенства и неравенства из Σ имеют вид

$$\begin{array}{llll} t_1 = t_2 & t_1 < t_2 & t_1 \le t_2 & t_1 \equiv_\gamma t_2 \\ t_1 \ne t_2 & t_1 > t_2 & t_1 \ge t_2 & t_1 \not\equiv_\gamma t_2, \end{array}$$

где t_1 и t_2 — выражения, состоящие из чисел $\mathbb{N}_0$ и операций $\mathbf{s}$, $+$, и $\beta \cdot \_$

С использованием несложных известных арифметических равносильностей можно привести эти элементы к виду:

$$\begin{array}{llll} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 < t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \le t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\gamma t_2 \\ \alpha\mathtt{x} + t_1 \ne t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 > t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \ge t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \not\equiv_\gamma t_2, \end{array}$$

где t_1 и t_2 — выражения того же вида, не содержащие $\mathtt{x}$

Лемма об элиминации квантора $\exists$ (доказательство)

$$\Sigma(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \overset{\exists \mathtt{x}}{\rightsquigarrow} \Delta(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

Перейдя от системы к совокупности систем,
можно устранить атомы четырёх видов:

$$A \not\equiv_\gamma B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A \equiv_\gamma B + 1 \\ A \equiv_\gamma B + 2 \\ \dots \\ A \equiv_\gamma B + (\gamma - 1) \end{array}\right. \qquad A \geq B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = B \\ A > B \end{array}\right.$$

$$A \neq B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < B \end{array}\right. \qquad A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = B \\ A < B \end{array}\right.$$

Осталось показать, как можно спроектировать по $\mathtt{x}$
систему Σ уравнений и неравенств вида

$$\alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 < t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 > t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\gamma t_2,$$

где t_1 и t_2 — выражения, состоящие из чисел $\mathbb{N}_0$ и операций $\mathbf{s}$, $+$, и $\beta\cdot$

Лемма об элиминации квантора $\exists$ (доказательство)

$$\Sigma(x, \widetilde{x}^n) \overset{\exists x}{\rightsquigarrow} \Delta(\widetilde{x}^n)$$

Если Σ содержит хотя бы одно равенство $=$, то исключить x можно так:

$$\begin{cases} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \beta x + t_3 > t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha\beta x + \alpha t_3 > \alpha t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 > \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \beta x + t_3 < t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha\beta x + \alpha t_3 < \alpha t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 < \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \beta x + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha\beta x + \alpha t_3 \equiv_{\alpha\gamma} \alpha t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \equiv_{\alpha\gamma} \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \Sigma'(\widetilde{x}^n) \end{cases} \Leftrightarrow_{(\widetilde{x}^n)} \begin{cases} t_1 \equiv_\alpha t_2 \\ t_2 \geq t_1 \\ \Sigma'(\widetilde{x}^n) \end{cases}$$

Пусть теперь система Σ не содержит равенств $=$

Лемма об элиминации квантора $\exists$ (доказательство)

$$\Sigma(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \overset{\exists \mathtt{x}}{\rightsquigarrow} \Delta(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

Во всех строгих неравенствах системы
можно получить одинаковые левые части:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 \gtrless t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \gtrless t_4 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta\mathtt{x} + \beta t_1 \gtrless \beta t_2 \\ \alpha\beta\mathtt{x} + \alpha t_3 \gtrless \alpha t_4 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta\mathtt{x} + \beta t_1 + \alpha t_3 \gtrless \beta t_2 + \alpha t_3 \\ \alpha\beta\mathtt{x} + \beta t_1 + \alpha t_3 \gtrless \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \ldots \end{cases}$$

Если система содержит много строгих неравенств *в одну сторону*
с одинаковыми левыми частями, то можно исключить $\mathtt{x}$
из всех неравенств, кроме одного:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t > t_1 \\ \alpha\mathtt{x} + t > t_2 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t > t_1 \\ t_1 \geq t_2 \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t > t_2 \\ t_2 \geq t_1 \end{cases} \end{array} \right. \\ \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t < t_1 \\ \alpha\mathtt{x} + t < t_2 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t < t_1 \\ t_1 \leq t_2 \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t < t_2 \\ t_2 \leq t_1 \end{cases} \end{array} \right. \\ \ldots \end{cases}$$

Лемма об элиминации квантора $\exists$ (доказательство)

$$\Sigma(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \overset{\exists \mathtt{x}}{\rightsquigarrow} \Delta(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

Равенства по модулю разных чисел можно привести к равенствам по модулю одного числа:

$$\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t_1 \equiv_\gamma t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \equiv_\delta t_4 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\delta \mathtt{x} + \delta t_1 \equiv_{\gamma\delta} \delta t_2 \\ \beta\gamma \mathtt{x} + \gamma t_3 \equiv_{\gamma\delta} \gamma t_4 \\ \ldots \end{cases}$$

Осталось показать, как исключить $\mathtt{x}$ из системы, содержащей

- не более одного неравенства $\alpha \mathtt{x} + t > t_1$,
- не более одного неравенства $\alpha \mathtt{x} + t < t_2$ с той же левой частью и
- произвольное число равенств $\beta_i \mathtt{x} + t_3^i \equiv_\gamma t_4^i$ по одинаковому модулю γ

Лемма об элиминации квантора $\exists$ (доказательство)

$$\begin{cases} [\alpha \mathrm{x} + t > t_1] \\ [\alpha \mathrm{x} + t < t_2] \\ \beta \mathrm{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \overset{\exists \mathrm{x}}{\rightsquigarrow} \Delta(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$$

Для каждого решения $(\delta, \widetilde{\delta}^n)$ системы, такого что $t[\widetilde{\delta}^n] \leq t_1[\widetilde{\delta}^n]$, найдётся такое решение $(\delta', \widetilde{\delta}^n)$, отличающееся только значением x:

$$(\alpha \mathrm{x} + t)[\delta', \widetilde{\delta}^n] \in \{t_1 + 1, t_1 + 2, \dots, t_1 + \alpha\gamma\}$$

Значит, неравенство $\alpha \mathrm{x} + t > t_1$ можно заменить на совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t > t_1 \\ \alpha \mathrm{x} + t = t_1 + 1 \\ \alpha \mathrm{x} + t = t_1 + 2 \\ \dots \\ \alpha \mathrm{x} + t = t_1 + \alpha\gamma \end{array}\right.$$

Устранение x из систем с $=$ обсуждалось ранее

Так можно устранить $>$ из рассматриваемой системы

Лемма об элиминации квантора $\exists$ (доказательство)

$$\begin{cases} [\alpha \mathrm{x} + t < t_1] \\ \beta \mathrm{x} + t_2 \equiv_\gamma t_3 \\ \dots \end{cases} \overset{\exists \mathrm{x}}{\rightsquigarrow} \Delta(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$$

$$\begin{cases} [\alpha \mathrm{x} + t < t_1] \\ \beta \mathrm{x} + t_2 \equiv_\gamma t_3 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} [t < t_1] \\ t_2 \equiv_\gamma t_3 \\ \dots \end{cases} \\ \begin{cases} [\alpha + t < t_1] \\ \beta + t_2 \equiv_\gamma t_3 \\ \dots \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} [\alpha(\gamma - 1) + t < t_1] \\ \beta(\gamma - 1) + t_2 \equiv_\gamma t_3 \\ \dots \end{cases} \end{array}\right.$$

Разрешимость АП (доказательство)

Лемма (об элиминации квантора $\forall$). Для любой формулы вида $\forall x\ \varphi(x, \widetilde{x}^n)$, где φ — бескванторная формула, существует бескванторная формула $\psi(\widetilde{x}^n)$, реализующая в $\overline{Ar}$ то же отношение

Доказательство.

Согласно основным равносильностям, $\forall x\ \varphi(x, \widetilde{x}^n) \sim \neg\exists x\ \neg\varphi(x, \widetilde{x}^n)$

По предыдущей лемме, существует бескванторная формула $\psi'(\widetilde{x}^n)$, реализующая в $\overline{Ar}$ то же отношение, что и $\exists x\ \neg\varphi(x, \widetilde{x}^n)$

Тогда $\psi = \neg\psi'$ — требуемая формула ▼ (леммы)

Возвращаемся к общему случаю: φ — произвольная $\rightsquigarrow$ ψ — бескванторная

Для преобразования произвольного предложения в бескванторное, достаточно конечное число раз применить леммы об элиминации кванторов $\exists$ и $\forall$, устраняя кванторы по одному от внутренних к внешним ▼

Выразительность АП (теорема)

Отношение R выразимо в $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \mathbf{s}; =]$ тогда и только тогда, когда оно является множеством решений какой-либо совокупности систем линейных (не)равенств $=$, $\neq$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\equiv_\alpha$, $\not\equiv_\alpha$ над $\mathbb{N}_0$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Рассмотрим формулу $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, реализующую отношение R

Согласно общему случаю в доказательстве теоремы о разрешимости АП, существует бескванторная формула $\psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, реализующая отношение R

Применяя законы булевой алгебры,
можно преобразовать ψ в равносильную ДНФ χ

Арифметическая трактовка χ — это совокупность систем линейных (не)равенств: отношение, реализуемое χ, совпадает с множеством решений совокупности систем, записанной в форме ДНФ

($\Leftarrow$) Совокупность систем Σ указанного вида может быть представлена в виде соответствующей ДНФ φ, и тогда формулой φ реализуется множество решений Σ ▼

Аксиомы АП

Один из известных наборов аксиом арифметики Пресбургера устроен так ($\mathcal{T}$):

- $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} + 0 = \mathrm{x})$
- $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathrm{x} + \mathbf{s}(\mathrm{y}) = \mathbf{s}(\mathrm{x} + \mathrm{y}))$
- $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} = \mathrm{x})$
- $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \rightarrow (\mathrm{y} = \mathrm{x}))$
- $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \,\&\, (\mathrm{y} = \mathrm{z}) \rightarrow (\mathrm{x} = \mathrm{z}))$
- $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \rightarrow (\mathbf{s}(\mathrm{x}) = \mathbf{s}(\mathrm{y})))$
- $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathbf{s}(\mathrm{x}) = \mathbf{s}(\mathrm{y})) \rightarrow (\mathrm{x} = \mathrm{y}))$
- $\forall \mathrm{x}\ \neg(0 = \mathbf{s}(\mathrm{x}))$
- $\varphi\{\mathrm{x}/0\} \,\&\, \forall \mathrm{x}\ (\varphi \rightarrow \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{s}(\mathrm{x})\}) \rightarrow \forall \mathrm{x}\ \varphi$,
  где φ — произвольная формула с одной свободной переменной x

Можно легко убедиться, что $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \mathbf{s}; =] \models \mathcal{T}$

$\boxed{\text{А доказать полноту этой теории можете попробовать самостоятельно}}$