

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 42

Арифметика Пресбургера

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Арифметика Пресбургера

$Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, s; =]$ — эта интерпретация оказалась непростой:

- ▶ её теория обязательно или неполна, или неперечислима
- ▶ не существует алгоритма, проверяющего справедливость арифметических теорем в этой сигнатуре

Попробуем посмотреть,

насколько упростится интерпретация, если *слегка* сузить сигнатуру

Напоминание: арифметика Пресбургера (АП) — это полная теория интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, s; =]$

В определении формальной арифметики,

в отличие от арифметики Пресбургера, не было требования **полноты** — это намёк на то, что существуют «полезные» полные теории арифметической интерпретации без умножения

Теорема. Арифметика Пресбургера разрешима

Разрешимость АП (доказательство)

Ar — так будем обозначать в доказательстве интерпретацию $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, s; =]$

Рассмотрим произвольную АП \mathcal{T}

Так как теория \mathcal{T} полна и $Ar \models \mathcal{T}$, для любой формулы $\varphi(\tilde{x}^n)$ верно

$$\models_{\mathcal{T}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad Ar \models \forall \tilde{x}^n \varphi$$

Значит, чтобы показать разрешимость \mathcal{T} , достаточно предоставить алгоритм проверки **истинности** произвольного **предложения** φ в Ar

Разрешимость АП (доказательство)

Заметим (вспомнив и теорему о подстановке определения), что в Ar выразимы следующие понятия:

- ▶ Заданное число α , $\alpha \in \mathbb{N}_0$:

$$y = \underbrace{s(s(\dots s(0)\dots))}_{\alpha \text{ раз}}$$

- ▶ Операция $\beta \cdot _$ умножения на заданное число β , $\beta \in \mathbb{N}_0$:

$$y = \underbrace{x_1 + x_1 + \dots + x_1}_{\beta \text{ раз}}$$

- ▶ Отношение $_ > _$:

$$\exists z (x_1 = x_2 + z \ \& \ \neg(z = 0))$$

- ▶ Отношение $_ \equiv_{\gamma} _$ равенства чисел по заданному модулю γ , $\gamma \in \mathbb{N}$:

$$\exists z (x_1 + \gamma \cdot z = x_2 \ \vee \ x_2 + \gamma \cdot z = x_1)$$

- ▶ Отношения \geq , $<$, \leq , \neq , \neq_{γ} :

$$x_1 > x_2 \ \vee \ x_1 = x_2 \quad x_2 > x_1 \quad x_2 \geq x_1 \quad \neg(x_1 = x_2) \quad \neg(x_1 \equiv_{\gamma} x_2)$$

По теореме о подстановке определения, достаточно предоставить алгоритм проверки истинности произвольного предложения φ в интерпретации \overline{Ar} , полученной из Ar добавлением этих понятий

Разрешимость АП (доказательство)

$$\overline{Ar} \models \varphi ?$$

Самый простой случай: φ — атомарное предложение

Тогда проверка соотношения $\overline{Ar} \models \varphi$ — это проверка того, входят ли числа, являющиеся значениями выражений над \mathbb{N}_0 , $+$, s и $\beta \cdot _$, в заданное отношение: $>$, \geq , $<$, \leq , $=$, \neq , \equiv_α или $\not\equiv_\alpha$

Алгоритмы вычисления значений таких выражений и проверки таких соотношений вам должны быть уже знакомы

Разрешимость АП (доказательство)

$$\overline{Ar} \models \varphi ?$$

Будем называть формулу **бескванторной**, если она не содержит ни одного квантора

Простой случай: φ — бескванторное предложение

Тогда проверку соотношения $\overline{Ar} \models \varphi$ можно устроить так (рекурсивно):

▶ $\varphi = \psi_1 \ \& \ \psi_2$:

$$\overline{Ar} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Ar} \models \psi_1 \text{ и } \overline{Ar} \models \psi_2$$

▶ $\varphi = \psi_1 \ \vee \ \psi_2$:

$$\overline{Ar} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Ar} \models \psi_1 \text{ или } \overline{Ar} \models \psi_2$$

▶ $\varphi = \psi_1 \rightarrow \psi_2$:

$$\overline{Ar} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Ar} \not\models \psi_1 \text{ или } \overline{Ar} \models \psi_2$$

▶ $\varphi = \neg\psi_1$:

$$\overline{Ar} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Ar} \not\models \psi_1$$

▶ φ — атом: это **самый простой случай**

Разрешимость АП (доказательство)

$$\overline{Ar} \models \varphi ?$$

Общий случай: φ — произвольное предложение

Покажем, как можно свести общий случай к простому:
преобразовать φ в бескванторное предложение ψ , такое что

$$\overline{Ar} \models \varphi \Leftrightarrow \overline{Ar} \models \psi$$

Лемма (об элиминации квантора \exists). Для любой формулы вида $\exists x \varphi(x, \tilde{x}^n)$, где φ — бескванторная формула, существует бескванторная формула $\psi(\tilde{x}^n)$, реализующая в \overline{Ar} то же отношение

Лемма об элиминации квантора \exists (доказательство)

$$\exists x \varphi(x, \tilde{x}^n) \rightsquigarrow \psi(\tilde{x}^n)$$

Используя **основные равносильности**, можно:

- ▶ преобразовать φ в равносильную

дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ):

$$\varphi \sim \exists x (L_1 \& \dots \& L_p \vee L'_1 \& \dots \& L'_q \vee \dots)$$

- ▶ вынести за квантор слагаемые ДНФ, не содержащие x :

$$\exists x (\chi_2(x, \tilde{x}^n) \vee \chi_1(\tilde{x}^n)) \sim \exists x (\chi_1(\tilde{x}^n) \vee \chi_2(x, \tilde{x}^n)) \sim \chi_1(\tilde{x}^n) \vee \exists x \chi_2(x, \tilde{x}^n)$$

- ▶ распространить квантор по слагаемым, оставшимся в ДНФ:

$$\exists x (K_1 \vee \dots \vee K_m) \sim \exists x K_1 \vee \dots \vee \exists x K_m$$

Осталось показать, как преобразовать каждую формулу $\exists x K_i(x, \tilde{x}^n)$ в бескванторную формулу $\psi_i(\tilde{x}^n)$, реализующую то же отношение в \overline{Ar}

Лемма об элиминации квантора \exists (доказательство)

$$\exists x K_i(x, \tilde{x}^n) \rightsquigarrow \psi_i(\tilde{x}^n)$$

K_i — это слагаемое ДНФ, то есть конъюнкция атомов и их отрицаний

Заменим каждое отрицание атома в K_i

на атом с противоположным отношением:

$$\neg(t_1 < t_2) \text{ — на } t_1 \geq t_2,$$

$$\neg(t_1 = t_2) \text{ — на } t_1 \neq t_2,$$

...

В результате получится конъюнкция атомов K'_i ,

реализующая то же отношение, что и K_i

Арифметический смысл такой конъюнкции атомов — это система линейных (не)равенств Σ над переменными x, \tilde{x}^n

Осталось показать, как можно спроектировать Σ по переменной x :

преобразовать Σ в совокупность Δ систем над \tilde{x}^n так,

чтобы набор (a_1, \dots, a_n) был решением Δ тогда и только тогда,

когда существует число a , такое что (a, a_1, \dots, a_n) — решение системы Σ

Лемма об элиминации квантора \exists (доказательство)

$$\Sigma(x, \tilde{x}^n) \stackrel{\exists x}{\rightsquigarrow} \Delta(\tilde{x}^n)$$

Равенства и неравенства из Σ имеют вид

$$\begin{array}{cccc} t_1 = t_2 & t_2 < t_2 & t_1 \leq t_2 & t_1 \equiv_{\gamma} t_2 \\ t_1 \neq t_2 & t_1 > t_2 & t_1 \geq t_2 & t_1 \not\equiv_{\gamma} t_2, \end{array}$$

где t_1 и t_2 — выражения, состоящие из чисел \mathbb{N}_0 и операций s , $+$, и $\beta \cdot _$

С использованием несложных известных

арифметических равносильностей можно привести эти элементы к виду:

$$\begin{array}{cccc} \alpha x + t_1 = t_2 & \alpha x + t_1 < t_2 & \alpha x + t_1 \leq t_2 & \alpha x + t_1 \equiv_{\gamma} t_2 \\ \alpha x + t_1 \neq t_2 & \alpha x + t_1 > t_2 & \alpha x + t_1 \geq t_2 & \alpha x + t_1 \not\equiv_{\gamma} t_2, \end{array}$$

где t_1 и t_2 — выражения того же вида, не содержащие x

Лемма об элиминации квантора \exists (доказательство)

$$\Sigma(x, \tilde{x}^n) \stackrel{\exists x}{\rightsquigarrow} \Delta(\tilde{x}^n)$$

Перейдя от системы к совокупности систем,
можно устранить атомы четырёх видов:

$$A \not\equiv_{\gamma} B \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv_{\gamma} B + 1 \\ A \equiv_{\gamma} B + 2 \\ \dots \\ A \equiv_{\gamma} B + (\gamma - 1) \end{cases} \quad A \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A > B \end{cases}$$

$$A \neq B \Leftrightarrow \begin{cases} A > B \\ A < B \end{cases} \quad A \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A < B \end{cases}$$

Осталось показать, как можно спроектировать по x
систему Σ уравнений и неравенств вида

$$\alpha x + t_1 = t_2 \quad \alpha x + t_1 < t_2 \quad \alpha x + t_1 > t_2 \quad \alpha x + t_1 \equiv_{\gamma} t_2,$$

где t_1 и t_2 — выражения, состоящие из чисел \mathbb{N}_0 и операций s , $+$, и β .

Лемма об элиминации квантора \exists (доказательство)

$$\Sigma(x, \tilde{x}^n) \stackrel{\exists x}{\rightsquigarrow} \Delta(\tilde{x}^n)$$

Если Σ содержит хотя бы одно равенство $=$, то исключить x можно так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \beta x + t_3 > t_4 \\ \dots \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha \beta x + \alpha t_3 > \alpha t_4 \\ \dots \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 > \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \beta x + t_3 < t_4 \\ \dots \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha \beta x + \alpha t_3 < \alpha t_4 \\ \dots \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 < \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \beta x + t_3 \equiv_{\gamma} t_4 \\ \dots \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha \beta x + \alpha t_3 \equiv_{\alpha \gamma} \alpha t_4 \\ \dots \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \equiv_{\alpha \gamma} \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t_1 = t_2 \\ \Sigma'(\tilde{x}^n) \end{array} \right\} \Leftrightarrow_{(\tilde{x}^n)} \left\{ \begin{array}{l} t_1 \equiv_{\alpha} t_2 \\ t_2 \geq t_1 \\ \Sigma'(\tilde{x}^n) \end{array} \right\}$$

Пусть теперь система Σ не содержит равенств $=$

Лемма об элиминации квантора \exists (доказательство)

$$\Sigma(x, \tilde{x}^n) \stackrel{\exists x}{\rightsquigarrow} \Delta(\tilde{x}^n)$$

Во всех строгих неравенствах системы
можно получить одинаковые левые части:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t_1 \geq t_2 \\ \beta x + t_3 \geq t_4 \\ \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta x + \beta t_1 \geq \beta t_2 \\ \alpha\beta x + \alpha t_3 \geq \alpha t_4 \\ \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta x + \beta t_1 + \alpha t_3 \geq \beta t_2 + \alpha t_3 \\ \alpha\beta x + \beta t_1 + \alpha t_3 \geq \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{array} \right.$$

Если система содержит много строгих неравенств *в одну сторону*
с одинаковыми левыми частями, то можно исключить x
из всех неравенств, кроме одного:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t > t_1 \\ \alpha x + t > t_2 \\ \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t > t_1 \\ t_1 \geq t_2 \\ \alpha x + t > t_2 \\ t_2 \geq t_1 \end{array} \right. \\ \dots \end{array} \right. \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t < t_1 \\ \alpha x + t < t_2 \\ \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + t < t_1 \\ t_1 \leq t_2 \\ \alpha x + t < t_2 \\ t_2 \leq t_1 \end{array} \right. \\ \dots \end{array} \right. \right.$$

Лемма об элиминации квантора \exists (доказательство)

$$\Sigma(x, \tilde{x}^n) \stackrel{\exists x}{\rightsquigarrow} \Delta(\tilde{x}^n)$$

Равенства по модулю разных чисел можно привести к равенствам по модулю одного числа:

$$\begin{cases} \alpha x + t_1 \equiv_{\gamma} t_2 \\ \beta x + t_3 \equiv_{\delta} t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\delta x + \delta t_1 \equiv_{\gamma\delta} \delta t_2 \\ \beta\gamma x + \gamma t_3 \equiv_{\gamma\delta} \gamma t_4 \\ \dots \end{cases}$$

Осталось показать, как исключить x из системы, содержащей

- ▶ не более одного неравенства $\alpha x + t > t_1$,
- ▶ не более одного неравенства $\alpha x + t < t_2$ с той же левой частью и
- ▶ произвольное число равенств $\beta_i x + t_3^i \equiv_{\gamma} t_4^i$
по одинаковому модулю γ

Лемма об элиминации квантора \exists (доказательство)

$$\left\{ \begin{array}{l} [\alpha x + t > t_1] \\ [\alpha x + t < t_2] \\ \beta x + t_3 \equiv_{\gamma} t_4 \\ \dots \end{array} \right. \stackrel{\exists x}{\rightsquigarrow} \Delta(\tilde{x}^n)$$

Для каждого решения $(\delta, \tilde{\delta}^n)$ системы, такого что $t[\tilde{\delta}^n] \leq t_1[\tilde{\delta}^n]$, найдётся такое решение $(\delta', \tilde{\delta}^n)$, отличающееся только значением x :

$$(\alpha x + t)[\delta', \tilde{\delta}^n] \in \{t_1 + 1, t_1 + 2, \dots, t_1 + \alpha\gamma\}$$

Значит, неравенство $\alpha x + t > t_1$ можно заменить на совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t > t_1 \\ \alpha x + t = t_1 + 1 \\ \alpha x + t = t_1 + 2 \\ \dots \\ \alpha x + t = t_1 + \alpha\gamma \end{array} \right.$$

Устранение x из систем с $=$ и устранение всех $<$, кроме одного, обсуждались ранее

Так можно устранить $>$ из рассматриваемой системы

Лемма об элиминации квантора \exists (доказательство)

$$\left\{ \begin{array}{l} [\alpha \mathbf{x} + t < t_1] \\ \beta \mathbf{x} + t_2 \equiv_{\gamma} t_3 \\ \dots \end{array} \right. \stackrel{\exists \mathbf{x}}{\rightsquigarrow} \Delta(\tilde{\mathbf{x}}^n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\alpha \mathbf{x} + t < t_1] \\ \beta \mathbf{x} + t_2 \equiv_{\gamma} t_3 \\ \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} [t < t_1] \\ t_2 \equiv_{\gamma} t_3 \\ \dots \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} [\alpha + t < t_1] \\ \beta + t_2 \equiv_{\gamma} t_3 \\ \dots \end{array} \right. \\ \dots \\ \left\{ \begin{array}{l} [\alpha(\gamma - 1) + t < t_1] \\ \beta(\gamma - 1) + t_2 \equiv_{\gamma} t_3 \\ \dots \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Разрешимость АП (доказательство)

Лемма (об элиминации квантора \forall). Для любой формулы вида $\forall x \varphi(x, \tilde{x}^n)$, где φ — бескванторная формула, существует бескванторная формула $\psi(\tilde{x}^n)$, реализующая в \overline{Ar} то же отношение

Доказательство.

Согласно **основным равносильностям**, $\forall x \varphi(x, \tilde{x}^n) \sim \neg \exists x \neg \varphi(x, \tilde{x}^n)$

По **предыдущей лемме**, существует бескванторная формула $\psi'(\tilde{x}^n)$, реализующая в \overline{Ar} то же отношение, что и $\exists x \neg \varphi(x, \tilde{x}^n)$

Тогда $\psi = \neg \psi'$ — требуемая формула **▼ (леммы)**

Возвращаемся к общему случаю: $\exists x \varphi(x, \tilde{x}^n) \rightsquigarrow \psi(\tilde{x}^n)$

Для преобразования произвольного предложения в бескванторное, как это требуется **в общем случае**, достаточно пошагово применять **леммы об элиминации кванторов \exists и \forall** ,

устраняя кванторы по одному от внутренних к внешним **▼**

Выразительность АП (теорема)

Отношение R выразимо в $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, s; =]$ тогда и только тогда, когда оно является множеством решений какой-либо совокупности систем линейных (не)равенств $=, \neq, >, <, \geq, \leq, \equiv_\alpha, \not\equiv_\alpha$ над \mathbb{N}_0

Доказательство.

(\Rightarrow) Рассмотрим формулу $\varphi(\tilde{x}^n)$, реализующую отношение R

Согласно **общему случаю** в доказательстве теоремы о разрешимости АП, существует **бескванторная** формула $\psi(\tilde{x}^n)$, реализующая отношение R

Применяя **законы булевой алгебры**,

можно преобразовать ψ в равносильную ДНФ χ

Арифметическая трактовка χ — это совокупность систем линейных (не)равенств: отношение, реализуемое χ , совпадает с множеством решений совокупности систем, записанной в форме ДНФ

(\Leftarrow) Совокупность систем Σ указанного вида может быть представлена в виде соответствующей ДНФ φ , и тогда формулой φ реализуется множество решений Σ ▼

Аксиомы АП

Один из известных наборов аксиом арифметики Пресбургера устроен так (\mathcal{T}):

- ▶ $\forall x (x + 0 = x)$
- ▶ $\forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$
- ▶ $\forall x (x = x)$
- ▶ $\forall x \forall y ((x = y) \rightarrow (y = x))$
- ▶ $\forall x \forall y \forall z ((x = y) \& (y = z) \rightarrow (x = z))$
- ▶ $\forall x \forall y ((x = y) \rightarrow (s(x) = s(y)))$
- ▶ $\forall x \forall y ((s(x) = s(y)) \rightarrow (x = y))$
- ▶ $\forall x \neg(0 = s(x))$
- ▶ $\varphi\{x/0\} \& \forall x (\varphi \rightarrow \varphi\{x/s(x)\}) \rightarrow \forall x \varphi,$
где φ — произвольная формула с одной свободной переменной x

Можно легко убедиться, что $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, s; =] \models \mathcal{T}$

А доказать, что эта теория полна, можете попробовать самостоятельно