Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\rightarrow$ Лекционные курсы $\rightarrow$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 42

Модальные логики

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: **Зима близко**

2: **Зима всегда близко**

3: **Зима бывает близко**

Если отбросить всё лишнее, то
для высказывания *1* справедлива одна из двух оценок:
правда, если зима действительно близко, и
неправда, если это не так

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ “зима близко”, то

1: x *2:* всегда x *3:* иногда бывает x

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Зима всегда близко

3: Зима бывает близко

Слова, используемые как уточнение истинностной оценки высказывания, называются модальностями (*лат. modus — мера*)

“Всегда” и “иногда” — это темпоральные модальности (модальности времени) (*лат. tempus — время*)

Можно сказать, что “всегда” и “иногда” — это $\forall$ и $\exists$, но тогда:

- Какими *предметами* задаётся время, и каковы свойства этих предметов?
- Как устроить анализ смысла высказываний в интерпретациях с такими предметами?

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: **Зима близко**

2: **Я знаю, что зима близко**

3: **Я допускаю возможность того, что зима близко**

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ “зима близко”, то

1: x *2:* известно, что x *3:* допустимо x

“Известно” и “допустимо” — это эпистемические модальности (модальности знания) (*др.-греч. — знание*)

Если “известно” и “допустимо” трактовать как $\forall$ и $\exists$,
то на какие “*предметы* знаний” указывают эти кванторы?

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: **Зима близко**

2: **Зима должна быть близко**

3: **Зима имеет право быть близко**

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ "зима близко", то

1: x *2:* должно быть x *3:* имеет право быть x

"Должен" и "имеет право" — это деонтические модальности (модальности долга)   (*др.-греч.* — должное)

Как связан смысл фраз "это так" и "это должно быть так"?

В *рациональных* высказываниях используется великое множество разных модальностей, и точно описать их смысл в рамках классической логики — очень непростая задача

Модальности

Чаще всего (*хотя и не всегда*) в высказываниях используются модальности двух двойственных видов:

Модальность необходимого	**Модальность возможного**
необходимо	возможно
обязательно	не исключено
всегда	иногда
должен	имеет право
знает	предполагает
доказуемо	непротиворечиво
$\Box$	$\Diamond$

Хотелось бы иметь единообразный способ определения смысла модальностей $\Box$ и $\Diamond$ — и такой способ используется в

модальных логиках

Модальные логики: синтаксис

Синтаксис формул *пропозициональных* модальных логик над множеством переменных Var:

$$\varphi \ ::= \ \mathtt{x} \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\Box\varphi) \ \mid \ (\Diamond\varphi) \ ,$$

где φ — формула и $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$

Это *синтаксис формул логики высказываний*, расширенный возможностью расстановки модальностей необходимого и возможного над любыми (под)формулами

Приоритет операций: $\neg$, $\Box$ и $\Diamond$; затем $\&$; затем $\vee$; затем $\to$

Пример формулы: $\Diamond\mathtt{x} \,\&\, \Box\neg\Diamond(\mathtt{x} \vee \mathtt{y})$

"*возможно* $\mathtt{x}$*, и при этом необходимо невозможно, что* $\mathtt{x}$ *или* $\mathtt{y}$"

В этой формуле пока не говорится,
что означают "необходимость" и "возможность":
определение этих понятий — часть *семантики* формулы

Модальные логики: семантика Крипке

Описание семантики начнём с примера: **Зима *бывает* близко**

Представим себе любое строгое определение зимы и того, в каких случаях зима считается близкой

Если остановить время и задаться вопросом, близко зима или нет, то ответ на этот вопрос (**да** или **нет**) можно задать как значение пропозициональной переменной x

Время течёт, и мир меняется, как и значение x:

$$\underset{\neg x}{\text{сейчас}} \longrightarrow \underset{\neg x}{\text{через минуту}} \longrightarrow \underset{\neg x}{\text{через месяц}} \longrightarrow \underset{x}{\text{через полгода}}$$

Ответ на вопрос “$\Diamond x$?” в так меняющемся мире — **да**, x бывает

Изменение мира можно представить себе и по-другому:
существует много взаимосвязанных миров с разными значениями x,
и в семантике $\Diamond$ комбинируются значения x многих миров

Модальные логики: семантика Крипке

Модель Крипке (над переменными Var) — это система (W, R, ξ), где

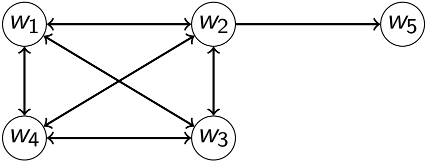
- W — множество состояний (возможных миров)
- $R \subseteq W \times W$ — отношение переходов между мирами
  - "$R(w_1, w_2)$" = "$w_1 \to w_2$"
  - Если $w \to w'$, то w' — мир, альтернативный для w (w-альтернатива)
- $\xi : W \to 2^{\mathsf{Var}}$ — оценка переменных для каждого мира
  - "$\mathtt{x} \in \xi(w)$" = "переменная $\mathtt{x}$ истинна в мире w"

Шкала Крипке (*Kripke frame*), на которой основывается модель (W, R, ξ), — это пара (W, R)

Модель Крипке — это *интерпретация* для формул модальной логики

Модальные логики: семантика Крипке

Например, (Var $= \{a\}$)



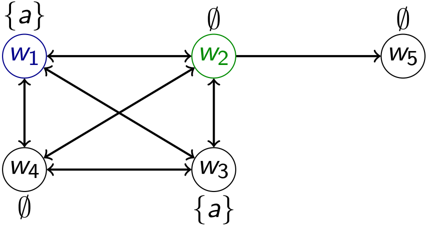
— это шкала Крипке

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \mathrm{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x} \in \xi(w)$ $\qquad (\mathrm{x} \in \mathsf{Var})$
- $\mathcal{I}, w \models \varphi \,\&\, \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \models \varphi$ и $\mathcal{I}, w \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$

Например, $(\mathsf{Var} = \{a\})$



— это модель Крипке $(\mathcal{I})$

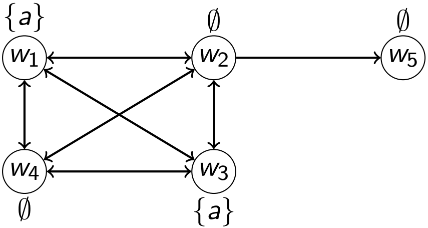
$\mathcal{I}, w_1 \models a, \qquad \mathcal{I}, w_2 \not\models a$

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \varphi \to \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \not\models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \not\models \varphi$

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



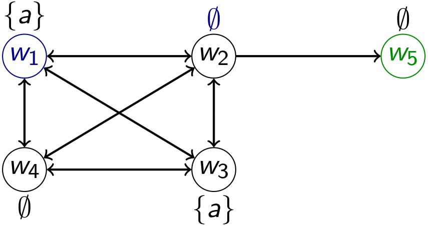
— это модель Крипке $(\mathcal{I})$

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi \quad \Leftrightarrow$
  для любой w-альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

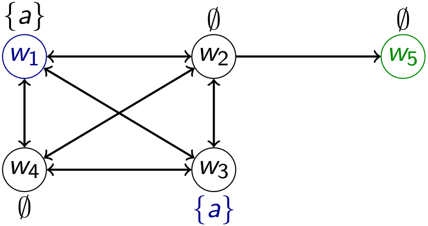
$$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a, \qquad \mathcal{I}, w_5 \models \Box a$$

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \Diamond\varphi \quad \Leftrightarrow$
  существует w-альтернатива w',
  такая что верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например, (Var $= \{a\}$)

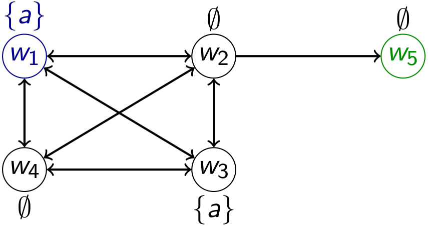


— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a, \qquad \mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond a$

Модальные логики: семантика Крипке

Например, (Var $= \{a\}$)

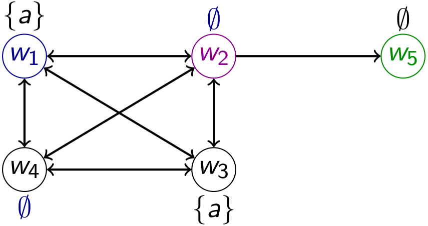


— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Box\Diamond a, \qquad \mathcal{I}, w_5 \models \Box\Diamond a$$

Модальные логики: семантика Крипке

Например, (Var $= \{a\}$)



— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Diamond\Box a$, $\mathcal{I}, w_2 \models \Diamond\Box a$, $\mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond\Box a$

Модальные логики: семантика Крипке

Пусть $\mathcal{F}$ — шкала Крипке, $\mathcal{I}$ — модель Крипке, и φ, ψ — формулы модальной логики

Тогда

- формула φ истинна в модели $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$), если для любого мира w модели $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$
- формула φ истинна на шкале $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models \varphi$), если для любой модели Крипке $\mathcal{J}$, основанной на $\mathcal{F}$, верно $\mathcal{J} \models \varphi$
- формула φ общезначима ($\models \varphi$), если для любой шкалы $\mathcal{F}$ верно $\mathcal{F} \models \varphi$
- формулы φ и ψ равносильны ($\varphi \sim \psi$), если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение. Для любой формулы φ верно: $\Diamond\varphi \sim \neg\Box\neg\varphi$

Доказательство. "Для любой альтернативы верно φ" = "Не существует альтернативы, такой что не-φ" ▼

Утверждение

Для любой формулы φ верно: если $\models \varphi$, то $\models \Box\varphi$

Доказательство. Если φ верно в любом мире любой модели, то φ верно и в любой альтернативе любого мира любой модели ▼

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение

Для любых формул φ, ψ верно: $\models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Доказательство. Рассмотрим модель $\mathcal{I} = (W, R, \xi)$ и мир w

Предположим, что $\mathcal{I}, w \not\models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Тогда

- $\mathcal{I}, w \models \Box(\varphi \to \psi)$, а значит, для каждой w-альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi \to \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi$, а значит, для каждой w-альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$ — и, по *семантике связки* $\to$, $\mathcal{I}, w' \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \not\models \Box\psi$, а значит, существует w-альтернатива w', такая что $\mathcal{I}, w' \not\models \psi$, что *противоречит* предыдущему пункту ▼