

# Математические методы верификации схем и программ

[mk.cs.msu.ru](http://mk.cs.msu.ru) → Лекционные курсы  
→ Математические методы верификации схем и программ

## Блок 31

Неправдоподобные вычисления  
временных автоматов

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
[valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)

Длительностью шага вычисления  $\sigma \rightarrow \sigma'$  назовём число  $\Delta(\sigma, \sigma')$ , равное

- ▶  $d$ , если  $\sigma \xrightarrow{d} \sigma'$ , где  $d > 0$
- ▶ 0, если  $\sigma \hookrightarrow \sigma'$

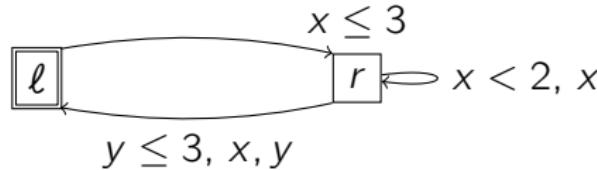
Длительностью трассы  $\sigma_0 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \dots$  назовём

- ▶ сумму  $\sum_{i=0}^k \Delta(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ , если эта трасса конечна и имеет длину  $(k + 1)$
- ▶ сумму ряда  $\sum_{i=0}^{\infty} \Delta(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ , если трасса бесконечна

Трассу назовём **конвергентной**, если её длительность конечна, и  
**дивергентной** иначе

Вычислением Зенона, или, по-другому, **зеноновским вычислением**,  
назовём конвергентное вычисление, содержащее бесконечно много  
шагов выполнения перехода

## Пример



*Конвергентные незеноновские вычисления:*

Все тупиковые вычисления конечны, а значит, попадают в эту категорию — например:

$$(\ell, 0, 0) \hookrightarrow (r, 0, 0) \mapsto (r, 1, 1) \mapsto (r, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \hookrightarrow (r, 0, \sqrt{2}) \mapsto (r, 3, \sqrt{2} + 3)$$

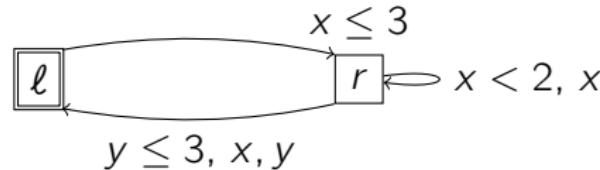
Длительность этого вычисления —  $\sqrt{2} + 3$ , выполнение перехода встретилось 2 раза

Бывают и бесконечные вычисления такого вида — например:

$$(\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \mapsto (\ell, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \mapsto \dots \mapsto (\ell, \frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n}) \mapsto \dots$$

В этом вычислении ни разу не выполняется переход, и длительность вычисления — 1

## Пример



Дивергентные вычисления:

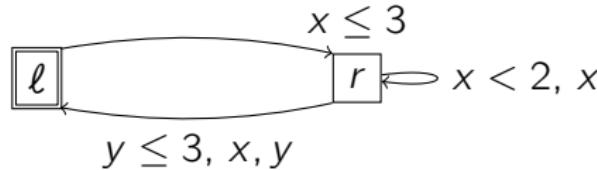
$$(\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, 1.2, 1.2) \hookrightarrow (r, 1.2, 1.2) \hookrightarrow (\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, 1.2, 1.2) \hookrightarrow \dots$$

$$(\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, 1, 1) \mapsto (\ell, 2, 2) \mapsto \dots \mapsto (\ell, n, n) \mapsto \dots$$

$$\begin{aligned} (\ell, 0, 0) &\mapsto (\ell, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \hookrightarrow (r, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \hookrightarrow (\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \hookrightarrow (r, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \hookrightarrow \dots \\ &\hookrightarrow (\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \hookrightarrow (r, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \hookrightarrow \dots \end{aligned}$$

Длительность последнего вычисления равна  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ , и известно что этот ряд расходится

## Пример



Зеноновские вычисления:

$$(\ell, 0, 0) \hookrightarrow (r, 0, 0) \hookrightarrow (\ell, 0, 0) \hookrightarrow (r, 0, 0) \hookrightarrow \dots$$

Длительность этого вычисления — 0, и бесконечное число раз выполняются переходы

$$\begin{aligned} (\ell, 0, 0) &\mapsto (\ell, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \hookrightarrow (r, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \hookrightarrow (\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \hookrightarrow (r, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \hookrightarrow \dots \\ &\hookrightarrow (\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}) \hookrightarrow (r, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}) \hookrightarrow \dots \end{aligned}$$

Длительность этого вычисления — 1, и бесконечно часто (хотя и не всегда) выполняются переходы

«В реальности» длительность выполнения СРВ потенциально бесконечна: сколько бы времени ни происходило наблюдение, всегда можно подождать ещё минуту

Поэтому все **конвергентные** вычисления следует считать **нереалистичными**:

- ▶ Тупиковое вычисление означает, что время принципиально не может больше течь, чего не бывает в реальности
- ▶ Бесконечное конвергентное вычисление означает, что за конечное время с системы было снято бесконечное число «снимков», а актуальной бесконечности не существует

При этом в любом автомате, содержащем хотя бы одно дивергентное вычисление, содержится и бесконечно много конвергентных: достаточно заменить шаг  $\sigma \xrightarrow{d} \sigma'$  на трассу  $\sigma \xrightarrow{\frac{d}{2}} \sigma_1 \xrightarrow{\frac{d}{4}} \dots \xrightarrow{\frac{d}{2^n}} \sigma_n \xrightarrow{\frac{d}{2^{n+1}}} \dots$  или любую аналогичную с суммой  $d$  ряда длительностей

Конвергентные вычисления имеют разную природу:

- ▶ некоторые из них (как упомянутые на предыдущем слайде) неизбежно следуют из устройства модели временных автоматов,
- ▶ но бывают и такие, которые свидетельствуют о **некорректности** конкретного автомата

«Неизбежные» конвергентные вычисления принято исключать из рассмотрения в семантике языка спецификаций СРВ

А остальные придётся исключить, поделив автоматы на «хорошо» и «плохо» построенные при помощи следующего определения

Временной автомат  $\mathcal{A}$  будем называть **корректным** (построенным «хорошо»), если верно следующее:

- ▶ Не существует ни одного зеноновского вычисления  $\mathcal{A}$
- ▶ Любая начальная трасса  $\mathcal{A}$  может быть продолжена до дивергентного вычисления  $\mathcal{A}$