Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 31

Неправдоподобные вычисления
временны́х автоматов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Длительностью шага вычисления $\sigma \to \sigma'$ назовём число $\Delta(\sigma, \sigma')$, равное

- d, если $\sigma \overset{d}{\hookrightarrow} \sigma'$, где $d > 0$
- 0, если $\sigma \hookrightarrow \sigma'$

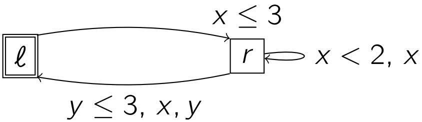
Длительностью трассы $\sigma_0 \to \sigma_1 \to \ldots$ назовём

- сумму $\sum\limits_{i=0}^{k} \Delta(\sigma_i, \sigma_{i+1})$, если эта трасса конечна и имеет длину $(k+1)$
- сумму ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \Delta(\sigma_i, \sigma_{i+1})$, если трасса бесконечна

Трассу назовём конвергентной, если её длительность конечна, и дивергентной иначе

Вычислением Зенона, или, по-другому, зеноновским вычислением, назовём конвергентное вычисление, содержащее бесконечно много шагов выполнения перехода

Пример



Конвергентные незеноновские вычисления:

Все тупиковые вычисления конечны, а значит, попадают в эту категорию — например:

$(\ell, 0, 0) \hookrightarrow (r, 0, 0) \mapsto (r, 1, 1) \mapsto (r, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \hookrightarrow (r, 0, \sqrt{2}) \mapsto (r, 3, \sqrt{2} + 3)$

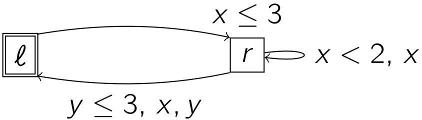
Длительность этого вычисления — $\sqrt{2} + 3$, выполнение перехода встретилось 2 раза

Бывают и бесконечные вычисления такого вида — например:

$$(\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \mapsto (\ell, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}) \mapsto \ldots \mapsto (\ell, \tfrac{n-1}{n}, \tfrac{n-1}{n}) \mapsto \ldots$$

В этом вычислении ни разу не выполняется переход, и длительность вычисления — 1

Пример



Дивергентные вычисления:

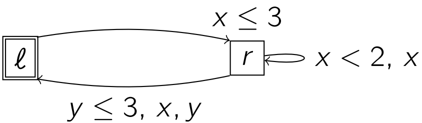
$$(\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, 1.2, 1.2) \hookrightarrow (r, 1.2, 1.2) \hookrightarrow (\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, 1.2, 1.2) \hookrightarrow \ldots$$

$$(\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, 1, 1) \mapsto (\ell, 2, 2) \mapsto \ldots \mapsto (\ell, n, n) \mapsto \ldots$$

$$(\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \hookrightarrow (r, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \hookrightarrow (\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) \hookrightarrow (r, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) \hookrightarrow \ldots$$
$$\hookrightarrow (\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) \hookrightarrow (r, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) \hookrightarrow \ldots$$

Длительность последнего вычисления равна $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$, и известно что этот ряд расходится

Пример



Зеноновские вычисления:

$$(\ell, 0, 0) \hookrightarrow (r, 0, 0) \hookrightarrow (\ell, 0, 0) \hookrightarrow (r, 0, 0) \hookrightarrow \dots$$

Длительность этого вычисления — 0, и бесконечное число раз выполняются переходы

$$(\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \hookrightarrow (r, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \hookrightarrow (\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}) \hookrightarrow (r, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}) \hookrightarrow \dots$$
$$\hookrightarrow (\ell, 0, 0) \mapsto (\ell, \tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{2^n}) \hookrightarrow (r, \tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{2^n}) \hookrightarrow \dots$$

Длительность этого вычисления — 1, и бесконечно часто (хотя и не всегда) выполняются переходы

«В реальности» длительность выполнения СРВ потенциально бесконечна: сколько бы времени ни происходило наблюдение, всегда можно подождать ещё минуту

Поэтому все конвергентные вычисления следует считать нереалистичными:

- Тупиковое вычисление означает, что время принципиально не может больше течь, чего не бывает в реальности
- Бесконечное конвергентное вычисление означает, что за конечное время с системы было снято бесконечное число «снимков», а актуальной бесконечности не существует

При этом в любом автомате, содержащем хотя бы одно дивергентное вычисление, содержится и бесконечно много конвергентных: достаточно заменить шаг $\sigma \xmapsto{d} \sigma'$ на трассу $\sigma \xmapsto{\frac{d}{2}} \sigma_1 \xmapsto{\frac{d}{4}} \dots \xmapsto{\frac{d}{2^n}} \sigma_n \xmapsto{\frac{d}{2^{n+1}}} \dots$ или любую аналогичную с суммой d ряда длительностей

Конвергентные вычисления имеют разную природу:

- некоторые из них (как упомянутые на предыдущем слайде) неизбежно следуют из устройства модели временны́х автоматов,
- но бывают и такие, которые свидетельствуют о некорректности конкретного автомата

«Неизбежные» конвергентные вычисления принято исключать из рассмотрения в семантике языка спецификаций СРВ

А остальные придётся исключить, поделив автоматы на «хорошо» и «плохо» построенные при помощи следующего определения

Временной автомат $\mathcal{A}$ будем называть корректным (построенным «хорошо»), если верно следующее:

- Не существует ни одного зеноновского вычисления $\mathcal{A}$
- Любая начальная трасса $\mathcal{A}$ может быть продолжена до дивергентного вычисления $\mathcal{A}$