«Элементы теории дискретных управляющих систем»

Лекторы —
зав. кафедрой, профессор С. А. Ложкин,
доцент, д.ф.-м.н. Д. С. Романов

Обязательный курс для студентов 318 группы; читается в 6 семестре в объеме 2 часа лекций и 1 час семинарских занятий в неделю

Информационная поддержка курса:
http://mk.cs.msu.ru/index.php/Элементы_теории_дискретных_управляющих_систем

I. Асимптотически наилучшие методы синтеза схем в некоторых моделях дискретных управляющих систем

I часть курса ЭТДУС продолжает III раздел курса ОК и посвещена решению задачи синтеза для (произвольных) функций алгебры логики (ФАЛ), а также систем ФАЛ или, иначе, операторов при их реализации в более общих по сравнению с «классическими» моделями дискретных управляющих систем — схемах в т. н. «произвольных» базисах.

В курсе ОК рассматривались формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ) в «стандартном» базисе $Б_0$, состоящем из элементов функционального типа $\&, \vee, \neg$, а также контактные схемы (КС) в «стандартном» базисе из элементов проводящего типа, состоящем из замыкающего контакта вида x_i и размыкающего контакта вида $\overline{x}_i$ от входных булевых переменных (БП) x_i, где $i = 1, \ldots, n, \ldots$.

Для каждого из указанных классов схем $\mathfrak{U}$, связанного с ним функционала сложности ψ, где
$\psi(\Sigma) = L(\Sigma)$ — обычная сложность, т. е. число элементов схемы Σ,
$\psi(\Sigma) = D(\Sigma)$ — глубина СФЭ Σ, т. е. максимальное число последовательно соединенных элементов Σ и т. п.,
решалась задача синтеза.
Эта задача заключается в построении для произвольной ФАЛ (оператора) F такой, реализующей F, схемы Σ, $\Sigma \in \mathfrak{U}$, для которой $\psi(\Sigma) = \min \psi(\Sigma')$, где минимум берется по всем реализующим F схемам $\Sigma', \Sigma' \in \mathfrak{U}$. Схема Σ считается при этом ψ-**минимальной**, а величина $\psi(\Sigma)$ называется ψ-**сложностью** F в $\mathfrak{U}$ и обозначается $\psi(F)$.

Задача синтеза в курсе ОК исследовалась, в основном, как массовая задача, то есть задача разработки методов синтеза, позволяющих для произвольной ФАЛ (оператора) $f(x_1, \ldots, x_n)$ построить такую реализующую ее схему Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}$, для которой величина $\psi(\Sigma)$ равна или «близка» к $\psi(f)$. Для этого вводилась и изучалась при $n = 1, 2, \ldots$ функция $\psi(n) = \max \psi(f)$, где максимум берется по всем ФАЛ f от БП $\{x_1, \ldots, x_n\}$, которая называется **функцией Шеннона для класса схем** $\mathcal{U}$ **и функционала сложности** ψ.

В I части курса ЭТДУС эти методы и результаты обобщаются на случай формул и СФЭ в произвольном конечном полном базисе $\text{Б} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_b\}$. Кроме того, в ней вводится класс КС в базисе Б, также класс т. н. итеративно-контактных схем (ИКС) в базисе Б, для которых устанавливаются аналогичные результаты.

Класс ИКС является моделью, в которой сочетается реализация ФАЛ в вершинах схемы с помощью суперпозиции базисных ФАЛ, характерная для СФЭ, с реализацией ФАЛ за счет проводимости ребер, отличающей КС. Этот класс является достаточно точной моделью современных СБИС на КМОП-транзисторах.

Некоторые определения и обозначения из курса ОК, связанные с задачей синтеза:

$B = \{0, 1\}, B^n = \underbrace{B \times \cdots \times B}_{n} = \{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) : \beta_i \in B\}$ — **единичный** n**-мерный куб**;

отображение $f : B^n \to B$ — **функция алгебры логики (ФАЛ)**;

$\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ — **счетный упоряд. алфавит входных БП**;

$\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, x_m, \ldots\}$ — **счетный упоряд. алфавит выходных БП**;

$P_2(X)$ — **множество ФАЛ** $f(x)$ **от конечного множества БП из** X**,** $X \subseteq \mathcal{X}$;

$P_2 = P_2(\mathcal{X})$, $P_2(n) = P_2(X(n))$, где $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$;

$P_2^m(n)$ — **множество** (n, m)**-операторов**, т. е. систем ФАЛ вида $F = (f_1, \ldots, f_m)$, где $f_i \in P_2(n)$, или, иначе, систем уравнений вида $(z_{j_1} = f_1, \ldots, z_{j_m} = f_m)$.

1. Формулы и СФЭ в произвольном базисе, функционалы их сложности. Верхние оценки числа формул и СФЭ

Продолжим начатое в курсе ОК изучение формул и СФЭ над произвольным конечным полным базисом $Б = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где функциональный элемент (ФЭ) $\mathcal{E}_i$ реализует ФАЛ $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$, которая в случае $k_i \geqslant 2$ существенно зависит от всех своих БП.

Будем по-прежнему представлять СФЭ Σ в виде $\Sigma = \Sigma(x; z)$, если $x = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $z = (z_{j_1}, \ldots, z_{j_m})$ — наборы, составленные из всех её различных входных и выходных БП, перечисленных в порядке возрастания их номеров в алфавитах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Z}$, соответственно.

Напомним, что Σ представляет собой ориентированную ациклическую сеть, все истоки которой и только они являются ее входами, которым взаимно однозначно сопоставлены БП набора x, используемые в качестве пометок соответствующих вершин.

Любая вершина[1] v, $v \in V(\Sigma)$, отличная от входов Σ, помечена ФЭ $\mathcal{E}_i$, $1 \leqslant i \leqslant b$, где $k_i = d^+(v)$, а все входящие в нее дуги пронумерованы числами $1, \ldots, k_i$ в соответствии с номером того входа ФЭ, с которым она связана. Выходами СФЭ Σ являются те ее вершины, которые помечены выходными БП, причем допускаются кратные выходы.

В каждой вершине v СФЭ Σ реализуется ФАЛ $f_v(x)$ и считается, что сама СФЭ Σ реализует оператор $F = (f_1, \ldots, f_m)$, где f_j — ФАЛ, реализуемая в вершине с пометкой z_j, $j = 1, \ldots, m$.

Напомним, что формула-слово $\mathcal{F}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$ в базисе Б задается своим деревом $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, а также квазидеревом-СФЭ $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{F}}$, которое получается отождествлением листьев $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ с одинаковыми пометками x_{j_i}, $i = 1, \ldots, n$.

[1] Для графа (схемы) G через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаются множества его вершин и ребер (дуг) соответственно, а для вершины v через $d^+(v)$ и $d^-(v)$ — число ее входящих и исходящих дуг соответственно.

Сложность, то есть число ФЭ, глубину, то есть максимальное число последовательно соединённых ФЭ, и ранг, то есть число дуг, исходящих из входов, в схеме Σ, следуя курсу ОК, будем обозначать через $L(\Sigma)$, $D(\Sigma)$ и $R(\Sigma)$ соответственно.

Введём теперь «взвешенные» функционалы сложности и глубины СФЭ. Будем считать, что каждому функциональному элементу $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, сопоставлены положительные действительные числа $\mathcal{L}_i$ и T_i, называемые его «весом» и «задержкой», которые характеризуют сложность («размер») и время срабатывания $\mathcal{E}_i$ соответственно. Предполагается, что «вес» и «задержка» любого ФЭ стандартного базиса $Б_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ равны 1.

Если (v_0, v_t)-цепь C длины t в СФЭ Σ проходит через свои «внутренние» вершины $v_1, \ldots, v_{t-1}$, и вершине v_j, $j = 1, \ldots, t$, при этом соответствует ФЭ $\mathcal{E}_{i_j}$ базиса Б, то число $T(C) = T_{i_1} + \cdots + T_{i_t}$ будем называть **задержкой** этой цепи.

По аналогии с глубиной определим **задержку** вершины v СФЭ Σ как максимальную задержку тех цепей Σ, которые начинаются в одной из ее входных вершин и заканчиваются в вершине v. Для каждой СФЭ Σ над базисом Б помимо сложности $L(\Sigma)$, глубины $D(\Sigma)$ и ранга $R(\Sigma)$ определим следующие параметры (функционалы сложности):

1) $\mathcal{L}(\Sigma)$ — **размер** Σ, то есть сумма «весов» всех её ФЭ;
2) $T(\Sigma)$ — **задержка** Σ, то есть максимальная задержка её вершин.

Заметим, что функционал L (D) является частным случаем функционала $\mathcal{L}$ (соответственно T), когда веса (соответственно задержки) всех ФЭ базиса Б равны 1. Введем также «частичный» размер $\mathcal{L}_{\text{Б}'}(\Sigma)$ (задержку $T_{\text{Б}'}(\Sigma)$), который равен сумме весов ФЭ Σ типа $\mathcal{E}_i$, где $\mathcal{E}_i \in \text{Б}'$, в СФЭ Σ (соответственно максимальной сумме задержек ФЭ указанного вида, лежащих на одной цепи Σ). Аналогичным образом вводится «частичная» сложность $L_{\text{Б}'}(\Sigma)$ и «частичная» глубина $D_{\text{Б}'}(\Sigma)$ для СФЭ Σ.

Напомним (см. курс ОК), что СФЭ называется **приведённой**, если выход любого её ФЭ, не являющийся выходом схемы, поступает на вход другого ФЭ этой схемы. Приведённая СФЭ (система формул) считается **строго приведённой**, если в ней нет эквивалентных вершин, то есть вершин, в которых реализуются равные ФАЛ (соответственно нет эквивалентных вершин, лежащих на одной цепи).

Заметим, что в строго приведённой формуле или СФЭ нет трёх или более последовательно соединённых одновходовых ФЭ.

Легко видеть также, что при любом $Б' \subseteq Б$ для любой СФЭ (системы формул) Σ существует эквивалентная ей строго приведённая СФЭ (соответственно система формул) Σ', для которой $\mathcal{L}_{Б'}(\Sigma') \leqslant \mathcal{L}_{Б'}(\Sigma)$ и $T_{Б'}(\Sigma') \leqslant T_{Б'}(\Sigma)$.

Для базиса $Б = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$ положим $\widehat{Б} = \{\, \mathcal{E}_i \mid k_i \geqslant 2 \,\}$ и заметим, что множество $\widehat{Б}$ не пусто в силу полноты базиса Б. Для ФЭ $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_i \in \widehat{Б}$, определим его **приведённый вес** ρ_i и **приведённую задержку** τ_i следующим образом:

$$\rho_i = \frac{\mathcal{L}_i}{k_i - 1}, \qquad \tau_i = \frac{T_i}{\log k_i}.$$

Введём, далее, величины $\rho_{Б} = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{Б}} \rho_i$ и $\tau_{Б} = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{Б}} \tau_i$, которые назовём **приведённым весом** и **приведённой задержкой базиса** Б соответственно. Для стандартного базиса $Б_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, очевидно, $\widehat{Б}_0 = \{\&, \vee\}$, $\rho_{Б_0} = \tau_{Б_0} = 1$. Для функционала сложности ψ типа L, $\mathcal{L}$, D, T через $\widehat{\psi}(\Sigma)$ будем обозначать величину $\psi_{\widehat{Б}}(\Sigma)$.

Утверждение 1.1

Для любой формулы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{Б}^{\Phi}$, выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) \leqslant \frac{1}{\rho_{Б}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1, \qquad R(\mathcal{F}) \leqslant 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{Б}}}. \tag{1.1}$$

Доказательство.

Пусть для каждого i, $i = 1, \ldots, b$, формула $\mathcal{F}$ содержит s_i ФЭ $\mathcal{E}_i$. При этом для числа ребер квазидерева $\mathcal{F}$ будут выполняться равенства

$$|E(\mathcal{F})| = \sum_{i=1}^{b} s_i \cdot k_i = R(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^{b} s_i - 1.$$

Следовательно,

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{b} s_i(k_i - 1) + 1 = \sum_{k_i \geqslant 2} \frac{k_i - 1}{\mathcal{L}_i} \cdot \mathcal{L}_i s_i + 1 \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \sum_{k_i \geqslant 2} \mathcal{L}_i s_i + 1 = \frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1$$

и первое неравенство (1.1) доказано.

Второе неравенство (1.1) доказывается индукцией по $D(\mathcal{F})$. Действительно, при $D(\mathcal{F}) = 0$, когда $\mathcal{F} = x_j$, оно, очевидно, выполняется. Пусть теперь второе неравенство (1.1) верно для любой формулы глубины меньше, чем d, и пусть $\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k_i})$, где $D(\mathcal{F}) = d$ и $D(\mathcal{F}_j) < d$, $\widehat{T}(\mathcal{F}_j) = t_j$ при всех $j = 1, \ldots, k_i$, а $t = \max_{1 \leqslant j \leqslant k_i} t_j$. Тогда

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{k_i} R(\mathcal{F}_j) \leqslant k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{\text{Б}}}}.$$

Следовательно, при $k_i = 1$ формула $\mathcal{F}$ удовлетворяет второму неравенству (1.1), так как в этом случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t$.

При $k_i \geqslant 2$ в соответствии с определением $\tau_Б$ выполняется неравенство

$$k_i \leqslant 2^{\frac{T_i}{\tau_Б}},$$

используя которое и учитывая, что в данном случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t + T_i$, получим

$$R(\mathcal{F}) \leqslant k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_Б}} \leqslant 2^{\frac{t+T_i}{\tau_Б}} = 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_Б}}.$$

Утверждение доказано. $\square$

Замечание

Аналогично первому неравенству (1.1) доказывается, что

$$|E(\mathcal{F})| \leqslant 6\big(R(\mathcal{F}) - 1\big) \tag{1.2}$$

если в квазидереве формулы $\mathcal{F}$ нет трёх и более последовательно соединённых одновходовых ФЭ.

Действительно, если $\mathcal{F}$ содержит s_i ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, то

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{b} s_i(k_i - 1) + 1 \geqslant \widehat{L}(\mathcal{F}) + 1,$$

$$|E(\mathcal{F})| \leqslant 3\big(R(\mathcal{F}) + \widehat{L}(\mathcal{F}) - 1\big) \leqslant 3\big(2R(\mathcal{F}) - 2\big) = 6\big(R(\mathcal{F}) - 1\big).$$

Неравенство (1.2) выполняется, в частности, для строго приведённой формулы $\mathcal{F}$.

Следуя курсу ОК, обозначим через $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$ и $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ множество СФЭ над базисом Б и множество формул над Б соответственно, считая, что $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi} \subseteq \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$. При этом для каждого A, $A \in \{\text{С}, \Phi\}$, определим размер $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(F)$ ФАЛ или системы ФАЛ F в классе $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}$ и её задержку $T_{\text{Б}}(F)$ обычным образом:

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(F) = \min \mathcal{L}(\Sigma) \quad \text{и} \quad T_{\text{Б}}(F) = \min T(\Sigma),$$

где минимум берется по всем СФЭ $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}$, реализующим F.
Через $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(n)$ и $T_{\text{Б}}(n)$ обозначим соответствующие функции Шеннона:

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(n) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(f), \quad T_{\text{Б}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} T_{\text{Б}}(f).$$

Пусть $\mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}\langle\mathcal{L}, n\rangle$ ($\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}\langle\mathcal{L}, n\rangle$, $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}\{T, n\}$) — множество всех строго приведённых СФЭ вида $\Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1)$ из $\mathcal{U}^{\text{С}}_{\text{Б}}$ (соответственно формул $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}}$), для которых $\mathcal{L}(\Sigma) \leqslant \mathcal{L}$ (соответственно $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \leqslant \mathcal{L}$, $T(\mathcal{F}) \leqslant T$).

Для приведённой одновыходной СФЭ Σ на базисом Б её **остовом** будем называть такую формулу $\mathcal{F}(x_1)$ над Б, дерево которой получается в результате применения к каждой вершине Σ операций отсоединения всех исходящих дуг, кроме одной, и объявления начальных вершин этих дуг листьями указанного дерева.

Для конечного множества схем $\mathcal{S}$ через $|\mathcal{S}|$ и $\|\mathcal{S}\|$ будем, как обычно, обозначать число попарно не изоморфных и попарно не эквивалентных схем в $\mathcal{S}$ соответственно. Буквой c с различными индексами будем обозначать константы, зависящие только от базиса Б.

Утверждение 1.2

Для любых $\mathcal{L} \geqslant 0$, $T \geqslant 0$ и любого натурального n справедливы неравенства :

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{C}}\langle\mathcal{L}, n\rangle\right\| \leqslant \left(c_1(\mathcal{L}+n)\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{1.3}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\langle\mathcal{L}, n\rangle\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{1.4}$$

$$\left\|\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\{T, n\}\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{2^{\frac{T}{\tau_{\text{Б}}}}}. \tag{1.5}$$

Доказательство.

Пусть $\Sigma \in \mathcal{U}^{\text{C}} \langle \mathcal{L}, n \rangle$, а $\check{\mathfrak{F}}$ — остов Σ. В силу утв. 1.1 и замечания к нему для $\check{\mathfrak{F}}$ выполняются неравенства

$$|E(\check{\mathfrak{F}})| \leqslant 6(R(\check{\mathfrak{F}}) - 1) \leqslant \frac{6}{\rho_{\text{Б}}} \hat{\mathcal{L}}(\check{\mathfrak{F}}),$$

а поскольку число таких попарно не изоморфных формул-остовов не превосходит $4^{|E(\check{\mathfrak{F}})|} \cdot b^{L(\check{\mathfrak{F}})}$, то, следовательно, их число не больше, чем $(c_2)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}} \mathcal{L}}$.

Любая формула $\mathfrak{F}$ (СФЭ Σ) из $\mathcal{U}^{\text{C}} \langle \mathcal{L}, n \rangle$ может быть получена в результате присоединения каждого из $R(\check{\mathfrak{F}})$ листьев дерева формулы $\check{\mathfrak{F}}$ к входам $x_1, \ldots, x_n$ (соответственно к входам $x_1, \ldots, x_n$ и внутренним вершинам $\check{\mathfrak{F}}$), которое можно осуществить не более, чем $n^{R(\check{\mathfrak{F}})}$ (соответственно $(L(\check{\mathfrak{F}}) + n)^{R(\check{\mathfrak{F}})}$) способами.

Учитывая то, что согласно определениям и (1.1)

$$L(\mathcal{F}) \leqslant \frac{1}{\pi_{\text{Б}}}\mathcal{L}(F) \quad \text{и} \quad R(\check{\mathfrak{F}}) \leqslant \frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}(\check{\mathfrak{F}}) + 1,$$

где $\pi_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \mathcal{L}_i = \frac{1}{c_0}$, и, перемножая полученные выше оценки, приходим к (1.4) и к (1.3) (с константой $c_1 = c_2 \max\{c_0, 1\}$).
В случае $\Sigma = \mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}\{T, n\}$, рассуждая аналогично, приходим к (1.5) с учётом того, что число рёбер в формуле $\check{\mathfrak{F}}$ не больше, чем $6 \cdot 2^{T/\tau_{\text{Б}}}$, число таких формул не превосходит $(c_2)^{2^{T/\tau_{\text{Б}}}}$, а их ранг ограничен сверху в силу (1.1) числом $2^{T/\tau_{\text{Б}}}$.
Утверждение доказано. $\square$

2. Некоторые модификации контактных схем, итеративные контактные схемы. Верхние оценки числа схем контактного типа

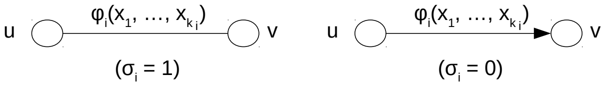
Рассмотрим теперь классы контактных схем (КС) и итеративно-контактных схем (ИКС) над заданным базисом из функционально-проводящих элементов (ФПЭ) или, для краткости, контактов, частным случаем которых является класс «обычных» КС.

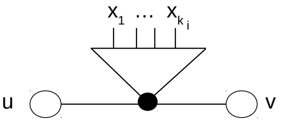
Рассматриваемые схемы строятся из ФПЭ базиса $Б = \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_b\}$, каждый элемент $\mathcal{K}_i$, $i = 1, \dots, b$, которого представляет собой тройку $\langle \varphi_i, \mathcal{L}_i, \sigma_i \rangle$, где φ_i — ФАЛ, существенно зависящая от БП $x_1, \dots, x_{k_i}$, $\mathcal{L}_i$ — положительное действительное число, а σ_i — булевская константа.

Предполагается, что число $\mathcal{L}_i$ характеризует сложность («вес») ФПЭ $\mathcal{K}_i$, который состоит из ориентированного в случае $\sigma_i = 0$ и неориентированного в случае $\sigma_i = 1$ контакта, проводящего на наборе α значений БП $x_1, \ldots, x_{k_i}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_i(\alpha) = 1$, причём указанная проводимость в случае $\sigma_i = 0$ имеет место только в направлении ориентации $\mathcal{K}_i$.

Под **стандартным** базисом $\text{Б}_0^{\text{КС}}$ будем понимать базис, состоящий из ФПЭ вида $\langle x_1, 1, 1 \rangle$, т. е. замыкающего неориентированного контакта, и ФПЭ вида $\langle \overline{x}_1, 1, 1 \rangle$, т. е. размыкающего неориентированного контакта.

Таким образом, с формальной точки зрения ФПЭ $\mathcal{K}_i$ представляет собой контакт (ребро) K_i с пометкой φ_i и указанием направленности, если $\sigma_i = 0$. При этом из содержательных соображений можно считать, что ФПЭ $\mathcal{K}_i$ состоит из контакта K_i и функционального элемента $\mathcal{E}_i$, реализующего ФАЛ φ_i, выход которого «управляет» проводимостью K_i.





Следуя курсу ОК, определим (одновходовую) КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ над базисом Б как частично ориентированный граф с единственным (проводящим) входом, помеченным символом 1, и m (проводящими) выходами, помеченными выходными БП $z_1, \ldots, z_m$, каждое ориентированное (соответственно, неориентированное) ребро которого помечено одной из базисных ФАЛ φ_i, где $\sigma_i = 0$ (соответственно, $\sigma_i = 1$), зависящей от k_i переменных из множества входных (управляющих) БП $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Для любой упорядоченной пары (u, v) вершин данной КС стандартным образом вводится ФАЛ проводимости от u к v, зависящая от БП $X(n)$.

Будем, как обычно, считать, что в каждой вершине рассматриваемой КС Σ реализуется ФАЛ проводимости от входа 1 к этой вершине, и что сама КС Σ реализует систему ФАЛ $F_\Sigma = (f_1, \ldots, f_m)$, где f_j — ФАЛ, реализуемая в вершине Σ с пометкой z_j, $j = 1, \ldots, m$.

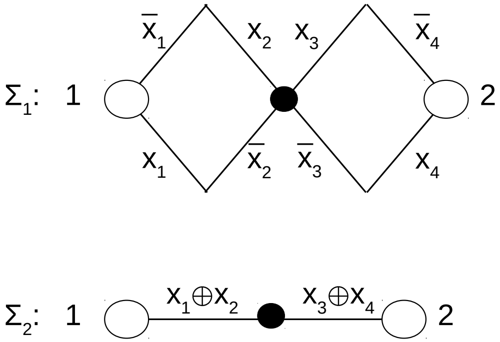
Пусть $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$ — класс КС над базисом Б, входные и выходные БП которых берутся из счётных упорядоченных непересекающихся алфавитов $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots\}$ соответственно.

Предполагается, что базис Б является полным, то есть любая ФАЛ от БП из $\mathcal{X}$ может быть реализована схемой из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$.

Заметим, что любой базис, содержащий «обычные» неориентированные замыкающий и размыкающий контакты, т. е. контакты с базисной ФАЛ x_i и $\bar{x}_i$ соответственно, является полным. Это верно, в частности, для стандартного базиса $Б_0^{КС}$.

Для удобства будем предполагать, что при построении схем над базисом Б разрешается подставлять константы вместо БП его контактов. В этом случае необходимым и достаточным условием полноты Б является наличие среди его базисных как ФАЛ, которая не является монотонной, так и ФАЛ, которая не является антимонотонной.

Так, КС Σ_1 и Σ_2 над полными базисами $Б_0^{КС}$ и $Б_{\oplus} = \{\langle x_1 \oplus x_2, 1\rangle, \langle x_1 \sim x_2, 1\rangle\}$, где



реализуют одну и ту же ФАЛ $(x_1 \oplus x_2) \cdot (x_3 \oplus x_4)$ и, следовательно, эквивалентны.

Под сложностью $\mathcal{L}(\Sigma)$ КС Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$, понимается, как обычно, сумма весов всех её ФПЭ, а под сложностью $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{К}}(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ от БП из $\mathcal{X}$ — минимальная из сложностей схем класса $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$, её реализующих. Для указанного функционала сложности обычным образом вводится соответствующая функция Шеннона

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{К}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{К}}(f), \tag{2.1}$$

где, как обычно, $P_2(n)$ — множество всех ФАЛ от БП $X(n)$, $n = 1, 2, \ldots$.
Определим далее класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ — класс **итеративно-контактных схем над базисом** Б.

Для этого рассмотрим счётный упорядоченный алфавит итеративных БП $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_p, \ldots\}$, где $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \varnothing$, и индукцией по t, $t = 0, 1, \ldots$, введём класс $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б},t}$ — класс ИКС **итеративного ранга** t над базисом Б.

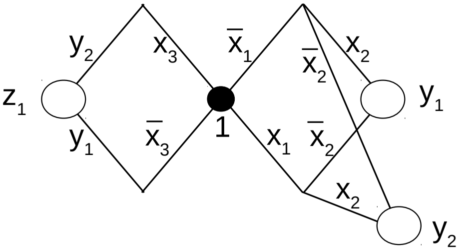
Базис указанной индукции составляет класс $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б},0}$ — класс ИКС итеративного ранга 0, который совпадает с классом $\mathcal{U}^{\text{К}}_{\text{Б}}$.

Индуктивный переход, позволяющий от ИКС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ из класса $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б},t}$, реализующей систему ФАЛ $(f_1, \ldots, f_m)$ от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$, переходить к реализующей систему ФАЛ $(f'_1, \ldots, f'_{j-1}, f'_{j+1}, \ldots, f'_m)$ от БП $x' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ ИКС $\Sigma' = \Sigma'(x', z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_m)$ из класса $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б},t+1}$, связан с применением операции присоединения выхода z_j ИКС Σ к её входу x_i.

Эта операция применима, если ФАЛ f_j не зависит существенно от x_i и состоит в замене пометки z_j выходной вершины v ИКС Σ, а также всех пометок БП x_i на контактах Σ пометками БП y_{t+1}. При этом предполагается, что ФАЛ $f_s'(x')$, где $s \neq j$, получается из ФАЛ $f_s(x)$ подстановкой ФАЛ $f_j(x')$ вместо БП x_j.

Будем считать, что для описанных выше схем ИКС Σ является **базовой ИКС ранга** t для ИКС Σ' и что переходя от ИКС Σ к её базовой ИКС $\widetilde{\widetilde{\Sigma}}$ ранга $(t-1)$ и т. д. мы придём к базовой для ИКС Σ' КС $\widehat{\widehat{\Sigma}}$. Заметим, что сложности всех построенных ИКС одинаковы и равны $L(\widehat{\widehat{\Sigma}})$. Определим, наконец, класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ как объединение классов $\mathcal{U}_{\text{Б},i}^{\text{ИКС}}$ по всем i, $i = 0, 1, \ldots$.

Так, ИКС Σ' вида



является ИКС итеративного ранга 2, которая реализует ФАЛ $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Заметим, что класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ является полным тогда и только тогда, когда полон класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$ и что на его полноту не влияет наличие в базисе Б ФПЭ $\mathcal{K}_i$, для которого $\varphi_i \equiv 0$ (т. н. «изолятора»), а также ФПЭ $\mathcal{K}_j$, для которого $\varphi_j \equiv 1$ и $\sigma_j = 0$ (т. н. «двустороннего проводника»). Более того, каждый из указанных ФПЭ может быть удален из схемы без изменения ее функционирования, если при этом отождествить концевые вершины $\mathcal{K}_j$. В связи с этим будем предполагать, что ФПЭ данного типа в базисе Б отсутствуют.

Для полного класса $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ и произвольной системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ обычным образом определяется сложность $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(F)$ — сложность реализации системы F в классе $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$, а затем аналогично (2.1) вводится соответствующая функция Шеннона $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n)$.

Пусть, как обычно, $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{W}(\mathcal{L}, n)$, где $W \in \{\text{К}, \text{ИКС}\}$, — множество всех одновыходных схем от БП $x_1, \ldots, x_n$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{W}$, реализующих одну ФАЛ из $P_2(n)$ со сложностью (с размером) не больше, чем $\mathcal{L}$.

Для базиса $\text{Б} = \{\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_b\}$ положим

$$\pi_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \mathcal{L}_i, \qquad \hat{\rho}_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \frac{\mathcal{L}_i}{k_i + 1}, \qquad k_{\text{Б}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant b} k_i.$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.1

Для любого $\mathcal{L} \geqslant 0$ и любого натурального n справедливы неравенства

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}\langle \mathcal{L}, n \rangle|| \leqslant \left(c_3 \mathcal{L} n^{k_{\text{Б}}}\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}}} \qquad (2.2)$$

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}\langle \mathcal{L}, n \rangle|| \leqslant \left(c_4 (\mathcal{L} + n)\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\hat{\rho}_{\text{Б}}}} \qquad (2.3)$$

Доказательство.

Пусть $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1)$ — схема от (управляющих) БП $x_1, \ldots, x_n$ с (проводящим) входом, имеющим пометку "1", и выходом z_1, которая принадлежит множеству $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}\langle \mathcal{L}, n\rangle$, включающему в себя множество $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}\langle \mathcal{L}, n\rangle$ в качестве подмножества. При этом для схемы Σ, содержащей для каждого i, $i = 1, \ldots, b$, $q_i = q_i(\Sigma)$ контактов $\mathcal{K}_i$, выполняются соотношения:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{b} q_i L_i \leqslant \mathcal{L};\ L = L(\Sigma) = \sum_{i=1}^{b} q_i \leqslant \left\lfloor \frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}} \right\rfloor; \tag{2.4}$$

$$R = R(\Sigma) = \sum_{i=1}^{b} k_i q_i \leqslant k_{\text{Б}} L; \tag{2.5}$$

$$L + R = \sum_{i=1}^{b} (k_i + 1) q_i = \sum_{i=1}^{b} q_i L_i \frac{k_i + 1}{L_i} \leqslant \frac{1}{\hat{\rho}_{\text{Б}}} \mathcal{L}(\Sigma). \tag{2.6}$$

Оценим сверху число попарно неизоморфных неориентированных связных графов схемы Σ указанного вида. Для этого выберем сначала ее остовное упорядоченное поддерево $\mathcal{D}$ с корнем в выходной вершине Σ так, чтобы оно содержало все инцидентные корню ребра схемы Σ, а ее вход был бы самым "левым" листом $\mathcal{D}$.

Достроим, далее, дерево $\mathcal{D}$ до остовного наддерева $\hat{\mathcal{D}}$ графа схемы Σ путем присоединения одной концевой вершины каждого из не вошедших в $\mathcal{D}$ ребер Σ к одной из отличных от входа и выхода инцидентных ему в Σ вершин $\mathcal{D}$ и объявления другой вершины этого ребра листом дерева $\hat{\mathcal{D}}$. Заметим, что (см. [1]) число различных полученных таким образом деревьев $\hat{\mathcal{D}}$ не больше, чем 4^L, а число отличных от корня вершин $\mathcal{D}$, среди которых содержатся все его листья, не больше, чем L.

Заметим также, что по дереву $\hat{\mathcal{D}}$ вход и выход Σ определяются однозначно, а для получения из него графа схемы Σ достаточно присоединить каждый его лист к одной из отличных от корня вершин $\hat{\mathcal{D}}$, причем число вариантов указанного присоединения не больше, чем L^L.

После этого для задания самой схемы Σ достаточно каждому ее ребру приписать тип связанного с ним контакта $\mathcal{K}_i$, $i = 1, \ldots, b$, (b^L вариантов) и, в случае ориентированности контакта $\mathcal{K}_i$, — ориентацию связанного с ним ребра (не более 2^L вариантов). Затем для каждого $i, i = 1, \ldots, b$, и каждого контакта $\mathcal{K}_i$ схемы Σ выбрать k_i вершин или БП, соответствующих аргументам базисной ФАЛ φ_i, управляющей его проводимостью, (всего R выбираемых позиций), то есть не более, чем n^R и $(n+L)^R$ вариантов в случае $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$ и $\Sigma \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ соответственно.

Из всего сказанного выше с учетом (2.4) – (2.6) вытекает, что

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}(L,n)|| \leqslant (8bL)^L \cdot n^R \leqslant (8bn^{k_{\text{Б}}}L)^L,$$

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(L,n)|| \leqslant (8bL)^L (n+L)^R \leqslant (8b(L+n))^{L+R}$$

и, следовательно,

$$||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}\langle\mathcal{L},n\rangle|| \leqslant \left(c_3\mathcal{L}n^{k_{\text{Б}}}\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}}},\ ||\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}\langle\mathcal{L},n\rangle|| \leqslant \left(c_4(\mathcal{L}+n)\right)^{\frac{1}{\hat{\rho}_{\text{Б}}}\mathcal{L}}$$

Утверждение доказано. □

3. Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Установим ряд нижних оценок для введённых в вопросах 1 и 2 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном, который основан на том, что число ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента n.

Пусть $\mathcal{U}$ — один из рассмотренных выше классов схем, Ψ — введённый там функционал сложности, а $\Psi(n)$ — функция Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно Ψ. Обозначим через $\mathcal{U}(\Psi, n)$ множество тех схем Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют одну ФАЛ из $P_2(n)$ и для которых $\Psi(\Sigma) \leqslant \Psi$. Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений:

$$||\mathcal{U}\big(\Psi(n), n\big)|| = 2^{2^n}. \tag{3.1}$$

Заметим также, что если для некоторого натурального n и действительных $\widehat{\Psi}$, δ, где $0 < \delta < 1$, выполняется неравенство

$$||\mathcal{U}\big(\widehat{\Psi}, n\big)|| \leqslant \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то} \tag{3.2}$$

то $\Psi(f) \geqslant \widehat{\Psi}$ для не менее чем $(1 - \delta) \cdot 2^{2^n}$ ФАЛ f из $P_2(n)$.

Для получения нижних мощностных оценок функций Шеннона докажем сначала следующее техническое утверждение.

Утверждение 3.1

Для $\gamma \in \{0,1\}$ *и положительных действительных чисел* a, α, y, q *таких, что*

$$(ay^{\gamma})^{\alpha y} > q, \tag{3.3}$$

в случае $\gamma = 1$ *и* $\frac{a}{\alpha}\log q > 1$ *выполняется неравенство*

$$y > \frac{\log q}{\alpha \log\left(\frac{a}{\alpha}\log q\right)}\left(1 + \frac{\log\log\left(\frac{a}{\alpha}\log q\right)}{\log\left(\frac{ae}{\alpha}\log q\right)}\right), \tag{3.4}$$

где e *— основание натуральных логарифмов, а в случае* $\gamma = 0$ *и* $a > 1$ *— неравенство*

$$y > \frac{\log q}{\alpha \log a}. \tag{3.5}$$

Доказательство.

В случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ неравенство (3.5) получается в результате логарифмирования (3.3) и деления обеих частей полученного неравенства на $\alpha \log a$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = \alpha = a = 1$ и $\log q > 1$. В данном случае неравенство (3.3) имеет вида $y^y > q$, а неравенство (3.4) — вид $y > y'$, где

$$y' = (1+\varepsilon)\frac{\log q}{\log\log q}, \quad \varepsilon = \frac{\log\log\log q}{\log\left(e\log q\right)}.$$

При этом неравенство (3.4) следует из того, что левая часть (3.3) монотонно возрастает по y и $(y')^{y'} \leqslant q$.

Действительно,

$$y' \log y' = (1+\varepsilon)\frac{\log q}{\log\log q}\left(\log\log q - \log\log\log q + \log e \ln(1+\varepsilon)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \log q(1+\varepsilon)\left(1 - \frac{\log\log\log q}{\log\log q} + \frac{\varepsilon \log e}{\log\log q}\right) =$$
$$= \log q(1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = \log q\left(1-\varepsilon^2\right) \leqslant \log q.$$

Заметим, что в случае $\gamma = 1$, $\alpha > 0$, $a > 0$ неравенство (3.3) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} > q^{\frac{a}{\alpha}},$$

и поэтому неравенство (3.4) получается из неравенства $y > y'$ в результате замены y на ay и $\log q$ на $\frac{a}{\alpha}\log q$, если выполнено условие $\frac{a}{\alpha}\log q > 1$. Утверждение доказано. $\square$

Верхние оценки величины $||\mathcal{U}(\Psi, n)||$, установленные в вопросах 1, 2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (3.1)–(3.2) служат основой для получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ. Напомним, что (см. (1.3)–(1.5), (2.2)–(2.3)) для каждого натурального n справедливы неравенства:

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}} \langle \mathcal{L}, n\rangle\right\| \leqslant \left(c_1(\mathcal{L}+n)\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{3.6}$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}} \langle \mathcal{L}, n\rangle\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\mathcal{L}+1}, \tag{3.7}$$

$$||\mathcal{U}^{\text{К}}_{\text{Б}} \langle \mathcal{L}, n\rangle|| \leqslant \left(c_3 \mathcal{L} n^{k_{\text{Б}}}\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\pi_{\text{Б}}}}, \tag{3.8}$$

$$||\mathcal{U}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}} \langle \mathcal{L}, n\rangle|| \leqslant \left(c_4(\mathcal{L}+n)\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\hat{\rho}_{\text{Б}}}}, \tag{3.9}$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}} \{T, n\}\right\| \leqslant \left(c_2 n\right)^{2^{\frac{T}{\tau_{\text{Б}}}}}. \tag{3.10}$$

При получении нижних оценок функций Шеннона вида $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(n)$, где $A \in \{\text{С}, \Phi, \text{К}, \text{ИКС}\}$, и $T_{\text{Б}}(n)$, а также соответствующих им «типичных» значений будем ориентироваться на их «ϵ-приближения» — функции $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{A}(n,\epsilon)$ и $\tilde{T}_{\text{Б}}(n,\epsilon)$ соответственно, где

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n,\epsilon) = \rho_{\text{Б}}\frac{2^n}{n}(1+\epsilon), \quad \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\Phi}(n,\epsilon) = \rho_{\text{Б}}\frac{2^n}{\log n}(1-\epsilon), \quad \mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{К}}(n,\epsilon) = \pi_{\text{Б}}\frac{2^n}{n}(1-\epsilon),$$

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n,\epsilon) = \hat{\rho}_{\text{Б}}\frac{2^n}{n}(1+\epsilon) \quad \text{и} \quad \tilde{T}_{\text{Б}}(n,\epsilon) = \tau_{\text{Б}}(n - \log\log n - \epsilon).$$

Напомним, что для стандартных базисов Б_0 и $\text{Б}_0^{\text{КС}}$ эти приближения при $\epsilon = 0$ являются асимптотически точными.

Утверждение 3.2

Для каждого класса схем $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}$, *где* $A \in \{\text{С}, \Phi, \text{К}, \text{ИКС}\}$, *существует такая неотрицательная и стремящаяся к* 0 *последовательность* $\epsilon_{\text{Б}}^{A}(n), n = 1, 2, \ldots,$ *что доля тех ФАЛ* $f, f \in P_2(n)$, *для которых выполняется неравенство*

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(f) \geqslant \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{A}(n, \epsilon_{\text{Б}}^{A}(n)), \tag{3.11}$$

а при $A = \Phi$, *кроме того, — неравенство*

$$T_{\text{Б}}(f) \geqslant \tilde{T}(n, \epsilon_{\text{Б}}^{\Phi}(n)), \tag{3.12}$$

не меньше, чем $1 - \frac{2}{n}$.

Доказательство.

Каждое неравенство (3.11), где $A \in \{\text{С}, \Phi, \text{К}, \text{ИКС}\}$, выводится из соответствующего рассматриваемому классу схем $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}$ с функционалом сложности $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}$ неравенства из (3.6)–(3.9) на основе мощностного неравенства (3.2) с использованием Утв. 3.1.

Для обоснования этого вывода рассмотрим множество $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}\left\langle \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{A}(n,\epsilon), n\right\rangle$, а также связанное с ним неравенство

$$\left\| \mathcal{U}_{\text{Б}}^{A}\left\langle \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{A}(n,\epsilon), n\right\rangle \right\| \leqslant \frac{1}{n} 2^{2^n}. \tag{3.13}$$

Заметим, что левая часть (3.13) задает число тех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, для которых $\mathcal{L}_{\text{Б}}^{A}(f) \leqslant \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{A}(n,\epsilon)$, и, следовательно, если оно выполняется, то доля таких ФАЛ в $P_2(n)$ не больше, чем $\frac{1}{n}$.

Указанное соотношение будет, очевидно, иметь место и тогда, когда выполняется (исходное) неравенство, получающееся из (3.13) в результате замены его левой части на правую часть соответствующего неравенства (3.6)–(3.9) при $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}^{A}(n, \epsilon)$ и последующего преобразования, приводящего ее к виду левой части (3.3) без уменьшения исходного значения. Из обратного к последнему (итогового) неравенства с помощью Утв. 3.1, где $q = \frac{1}{n} 2^{2^n}$, находится искомое значение $\epsilon_{Б}^{A}(n)$ как значение, при котором получается соответствующее значение правой части (3.4).

Рассмотрим для примера класс $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, для которого описанное выше исходное неравенство будет выглядеть следующим образом

$$\left(c_1(\tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n,\epsilon)+n)\right)^{\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}\tilde{\mathcal{L}}(n,\epsilon)+1} \leqslant \frac{1}{n}2^{2^n}.$$

Заметим, что левая часть этого неравенства будет не больше, чем левая часть (3.3), где $\gamma=1, a=c_1, \alpha=\frac{1}{\rho_{\text{Б}}}$ и $y=\tilde{\mathcal{L}}_{\text{Б}}^{\text{С}}(n,\epsilon)+n+\rho_{\text{Б}}$. При этом правая часть (3.3), как уже говорилось, будет равна $q=\frac{1}{n}2^{2^n}$.

Решая соответствующее итоговое неравенство согласно (3.4), получим

$$y > \frac{1}{\rho_Б} \cdot \frac{2^n - \log n}{n + c_1'} \left(1 + \frac{\log(n + c_1'')}{n + c_1'''}\right) \geqslant \frac{1}{\rho_Б} \cdot \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\log n - \tilde{c}_1}{n}\right) = y_0,$$

где $\tilde{c}_1 > 0$. Таким образом, полагая $\epsilon_Б^С(n) = \frac{\log n - 2\tilde{c}_1}{n}$, мы получим искомое значение, так как при этом

$$\tilde{\mathcal{L}}^С(n, \epsilon_Б^С(n)) = \frac{2^n}{n}(1 + \epsilon_Б^С(n)) > y_0 + n + \rho_Б,$$

начиная с некоторого $n = n_0$.

Следовательно, доля тех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, для которых $\mathcal{L}_Б^С(f) \leqslant \tilde{\mathcal{L}}_Б^С(n, \epsilon_Б^С(n))$, не больше, чем $\frac{1}{n}$, если $n > n_0$.

Аналогичным образом на основе неравенств (3.10) и (3.2) с использованием Утв. 3.1, где

$$q = \frac{1}{n} 2^{2^n}, \quad y = 2^{\tilde{\tau}_{\text{Б}}(n,\epsilon)}, \quad \gamma = 0, \quad \alpha = \frac{1}{\tau_{\text{Б}}} \quad \text{и} \quad a = c_2,$$

устанавливается справедливость (3.12) при $\epsilon_{\text{Б}}^{\Phi}(n) = \frac{c_2'}{\log n}$ для некоторого $c_2' > 0$.

Утверждение доказано. □

Следствие 1

Для почти всех ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, одновременно выполняются все неравенства вида $\mathcal{L}^A_{\text{Б}}(f) \gtrsim \tilde{\mathcal{L}}^A_{\text{Б}}(n, 0)$, где $A \in \{\text{С}, \Phi, \text{К}, \text{ИКС}\}$, а также неравенство $T_{\text{Б}}(f) \geqslant \tilde{T}_{\text{Б}}(n, 0) - o(1)$.

Следствие 2

$$\mathcal{L}^{\text{С}}_{\text{Б}}(n) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}^{\Phi}_{\text{Б}}(n) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n}, \quad \mathcal{L}^{\text{К}}_{\text{Б}}(n) \gtrsim \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}, \quad \mathcal{L}^{\text{ИКС}}_{\text{Б}}(n) \gtrsim \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n},$$

$$T_{\text{Б}}(n) \geqslant \tau_{\text{Б}}(n - \log\log n - o(1)).$$

4. Обобщенное разложение мультиплексорных ФАЛ, его особенности. Универсальные множества ФАЛ, их построение и реализация

Пусть $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ — разбиение куба B^n от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$. *Обобщенная мультиплексорная ФАЛ* соответствующая разбиению Δ определяется равенством

$$\mu_\Delta(x,\ u_1, \ldots, u_p) = \bigvee_{i=1}^{p} \chi_{\delta_i}(x) u_i,$$

где χ_{δ_i} — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i. Тогда стандартную мультиплексорную ФАЛ порядка n

$$\mu_n(x,\ u_0, \ldots, u_{2^n-1}) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in B^n} K_\sigma(x) u_{\nu(\sigma)}$$

можно рассматривать как обобщённую мультиплексорную ФАЛ μ_Δ с тривиальным разбиением Δ таким, что $\delta_{\nu(\sigma)} = \{\sigma\}$ для каждого σ, $\sigma \in B^n$.

Утверждение 4.1

Для любой существенной ФАЛ $\psi(y_1, \ldots, y_p)$ и любого разбиения $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$, $d = p$, куба B^n от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$ существуют ФАЛ $g_i(x, u_i)$, $i = 1, \ldots, p$, которые монотонно или антимонотонно зависят от БП $u_1, \ldots, u_p$, такие что $\psi(g_1, \ldots, g_p) = \mu_\Delta(x,\ u_1, \ldots, u_p)$.

Доказательство.

Существенность ФАЛ ψ означает, что для любого i, $i = 1, \ldots, p$, найдутся булевские константы $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p}$ такие, что

$$\psi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\ y_i,\ \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}. \qquad (4.1)$$

Значит, определив ФАЛ g_j так, что

$$g_j(\beta, u_j) = \begin{cases} \alpha_{i,j}, & \text{если } \beta \in \delta_i \text{ при } j \neq i; \\ u_j \oplus \alpha_{j,j}, & \text{если } \beta \in \delta_j; \end{cases} \tag{4.2}$$

для всякого β, $\beta \in \delta_i$, будем иметь

$$\psi\big(g_1(\beta, u_1), \ldots, g_{i-1}(\beta, u_{i-1}),\ g_i(\beta, u_i),\ g_{i+1}(\beta, u_{i+1}), \ldots, g_p(\beta, u_p)\big) =$$
$$= \varphi\big(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\ y_i \oplus \alpha_{i,i},\ \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}\big) = \big(y_i \oplus \alpha_{i,i}\big) \oplus \alpha_{i,i} = y_i =$$
$$= \mu_\Delta\big(\beta,\ u_1, \ldots, u_p\big). \tag{4.3}$$

Из (4.1) следует, что каждая ФАЛ g_j зависит от БП u_j только на компоненте δ_j, на которой $g_j = u_j \oplus \alpha_{j,j}$. Следовательно, каждая ФАЛ g_j либо монотонно, либо антимонотонно зависит от БП u_j.

Утверждение доказано. □

Замечание 1

Утв. 4.1 остаётся верным и в том случае, когда $d < p$, если при этом формально считать все недостающие компоненты разбиения Δ пустыми, то есть $\delta_{d+1} = \cdots = \delta_p = \varnothing$. Соответствующие пустым компонентам БП $y_{d+1}, \ldots, y_p$ являются фиктивными БП ФАЛ $g_{d+1}, \ldots, g_p, \mu_\Delta$.

Замечание 2

В условиях Утв. для каждого j, $j = 1, \ldots, d$, положим $\sigma_j = 1$ (соответственно $\sigma_j = 0$), если ФАЛ $g_j(x, u_j)$ монотонно (соответственно антимонотонно) зависит от БП x_j. Тогда, полагая, что для $\tau = 0, 1$ ФАЛ $g_{j,\tau}(x) = g_j(x, \tau)$, получим

$$g_j(x, u_j) = g_{j,\bar{\sigma}_j}(x) \vee u_j^{\sigma_j} g_{j,\sigma_j}(x). \tag{4.4}$$

Замечание 3

В том случае, когда Δ — тривиальное разбиение куба B^n и $d = 2^n$ ФАЛ $g_{j,0}(x)$ и $g_{j,1}(x)$ отличаются друг от друга только на одном наборе значений БП x.

Напомним (см. [1]), что множество ФАЛ G называется дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) ФАЛ порядка m и ранга p, тогда и только тогда, когда $G \subseteq P_2(m)$ и для любой ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, найдутся функции $g_1, \ldots, g_p$ из G, для которых $g = g_1 \vee \cdots \vee g_p$.
Обобщим понятие ДУМ ФАЛ следующим образом. Пусть $\psi(y_1, \ldots, y_p)$ — существенная ФАЛ, то есть ФАЛ, существенно зависящая от всех своих БП.
Множество ФАЛ G, $G \subseteq P_2(m)$, называется *ψ-универсальным множеством* (*ψ-УМ*) *порядка* m, если любая ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = \psi(g_1, \ldots, g_p), \tag{4.5}$$

где $g_i \in G$ при всех i, $i = 1, \ldots, p$. Заметим, что понятие ψ-УМ порядка m совпадает с понятием ДУМ порядка m и ранга p в случае $\psi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 \vee \cdots \vee y_p$.

Так же, как и ДУМ, будем строить ψ-УМ порядка m на основе разбиения $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ единичного куба B^m, где $|\delta_i| = s_i, i = 1, \ldots, p$, соотношений (4.1) и Утв. 4.1.

Обозначим через $G^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p$, связанное с БП y_j ФАЛ ψ множество, состоящее из всех тех ФАЛ из $P_2(m)$, которые при любом i, $1 \leqslant i \leqslant p$ и $j \neq i$, равны $\alpha_{i,j}$ на множестве наборов δ_i, и пусть

$$G = G^{(1)} \cup \cdots \cup G^{(p)}. \tag{4.6}$$

Заметим, что при этом в силу (4.1)–(4.3) множество $G^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant p$, — множество, состоящее из всех 2^{s_j} различных ФАЛ вида $g_j(x, g(x))$, где $g(x)$ – произвольная ФАЛ из $P_2(m)$. Отсюда следует, что

$$\mu_\Delta(x, g(x), \ldots, g(x)) = \psi(g_1(x, g(x)), \ldots, g_p(x, g(x)) = g(x),$$

то есть выполнено (4.5) и G является ψ-УМ порядка m, для которого $|G| \leqslant 2^{s_1} + \ldots + 2^{s_p}$.

Таблица значений системы ФАЛ $\vec{G}$:

		$x_1 \dots x_m$	$\vec{G}^{(1)}(x)$	$\vec{G}^{(2)}(x)$	...	$\vec{G}^{(p)}(x)$	g
δ_1	s_1	$0 \dots 0$	00 1 . . . . . 00 . 01 . . . 1	$\alpha_{1,2}$		$\alpha_{1,p}$	β_1
δ_2	s_2		$\alpha_{2,1}$	00 1 . . . . . . 00 . 01 . . . 1		$\alpha_{2,p}$	β_2
δ_p	s_p	$1 \dots 1$	$\alpha_{p,1}$	$\alpha_{p,2}$		00 1 . . . . . . 00 . 01 . . . 1	β_p
			2^{s_1}	2^{s_2}		2^{s_p}	

Построенное таким образом ψ-УМ G порядка m будем называть *стандартным ψ-УМ, связанным с разбиением* Δ. Если при этом для s, $1 \leqslant s \leqslant 2^m$, Δ – разбиение куба B^m на $d = \lceil 2^m/s \rceil \leqslant p$, последовательных отрезков, длины которых, за исключением, возможно, последнего (непустого), равны s, то множество G будем называть *ψ-УМ порядка m и высоты s*.

Приведём пример стандартного ψ-УМ для функции $\psi(y_1, \ldots, y_p) = y_1 y_2 \vee y_3 y_4 \vee \ldots \vee y_{2t-1} y_{2t}$, где $p = 2t$, связанного с разбиением куба B^m на последовательные отрезки $\delta_1, \ldots, \delta_p$ длины $s_1, \ldots, s_p$ соответственно, где $s_1 + \cdots + s_p = 2^m$. Выберем для его построения константы в (4.1) так, что $\alpha_{i,j} = 1$ только тогда, когда $|i - j| = 1$ и $\max\{i, j\} = 2\ell$ при всех $\ell, \ell = 1, \ldots, t$. Тогда в таблице значений соответствующего стандартного ψ-УМ G' вида (4.6) любой ее «внедиагональный» ненулевой блок состоит только из 1 и примыкает к 2 соседним «диагональным» блокам с номерами $(2\ell - 1)$ и 2ℓ, где $\ell = 1, \ldots, t$.

Утверждение 4.2

В условиях Утв. 4.1 существует ψ-УМ G порядка m и четной высоты s такое, что

$$|G| \leqslant p \cdot 2^s, \quad L^A(\vec{G}) \leqslant e_A \cdot |G| + O(p \cdot 2^{m+s/2}), \tag{4.7}$$

где $A \in \{K, C\}$ и $e_K = 2$, $e_C = 4$.

Доказательство.

Построим стандартное ψ-УМ G порядка m и высоты s в соответствии с (4.6) и заметим, что при этом

$$|G| \leqslant |G^{(1)}| + \cdots + |G^{(p)}| \leqslant p \cdot 2^s.$$

Для доказательства второго неравенства (4.7) достаточно реализовать систему ФАЛ $\vec{G}$ схемой Σ_G, $\Sigma_G \in \mathcal{U}^A$, построенной по методу каскадов, используя в качестве первой БП разложение ФАЛ из G БП x_m.

Действительно, на реализацию указанного разложения любой ФАЛ из G потребуется не более e_A элементов, число различных «остаточных» ФАЛ такого разложения для всех ФАЛ из G в силу четности s будет не больше, чем $p \cdot 2^{s/2}$, а сложность каждой из «остаточных» ФАЛ не превосходит, очевидно, $O(2^m)$.

Утверждение доказано. $\square$

Замечание

Утверждение будет верно и в том случае, когда $d < p$ (см. замечание 2 к Утв. 4.1). При этом в случае $j > d$ множество $G^{(j)}$ будет состоять из единственной ФАЛ $g_j(x)$ из указанного замечания.

5. Асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ и ИКС в произвольном базисе

Используем построенные выше стандартные ψ-УМ для синтеза СФЭ в базисе Б, $\text{Б} = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$. В силу полноты базиса Б в $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ существуют формулы $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$ и $\mathcal{F}_{\neg}$, реализующие ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x}_1$ соответственно, которыми мы будем заменять ФЭ базиса Б_0 при синтезе схем на основе конъюнктивных и дизъюнктивных представлений.

Утверждение 5.1 (ср. [1])

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, такая, что

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{3\log n + O(1)}{n}\right). \tag{5.1}$$

Доказательство.

Найдём среди ФЭ базиса Б, $Б = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, элемент $\mathcal{E}_j$, на котором достигается приведённый вес $\rho_j = \rho_Б$ (см. вопрос 1), то есть

$$\rho_j = \frac{\mathcal{L}_j}{k_j - 1} = \min_{k_i \geqslant 2} \rho_i = \rho_Б. \tag{5.2}$$

Пусть, далее, m, s, t, p— натуральные числа, причем s — четное, такие, что

$$p = t(k_j - 1) + 1, \tag{5.3}$$

$$k_j \leqslant \frac{2^m}{s} \leqslant p < \frac{2^m}{s} + (k_j - 1), \tag{5.4}$$

Построим из t ФЭ $\mathcal{E}_j$ бесповторную формулу $\mathcal{F}_t$ с p входами, которая имеет вид квазиполного l-ярусного, $l = \lceil \log_k p \rceil$, дерева и реализует ФАЛ $\psi(y_1, \ldots, y_p)$. Пусть G, $G \subseteq P_2(m)$,— стандартное ψ-УМ порядка m и (четной) высоты s. Построим по Утв. 4.2 реализующую систему ФАЛ $\vec{G}$ СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, а затем путем замены ее ФЭ $\&, \vee, \neg$ схемами $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\neg}$ получим эквивалентную ей СФЭ Σ_G из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$ такую, что

$$\mathcal{L}(\Sigma_G) = O(p \cdot 2^s + p \cdot 2^{m+s/2}). \tag{5.5}$$

Путем аналогичного моделирования мультиплексорной СФЭ порядка $(n-q)$ от адресных БП x'' в стандартном базисе, которая имеет сложность не больше, чем $4 \cdot 2^{n-q}$ (см., например, [1]), построим эквивалентную ей СФЭ Σ'' из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$:

$$\mathcal{L}(\Sigma'') = O(2^{n-q}). \tag{5.6}$$

Искомая СФЭ Σ_f строится, как обычно, на основе разложения ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменным $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot f_{\sigma''}(x'), \tag{5.7}$$

где $q = m$, $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, а $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. При этом для реализации каждой ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, используется её представление

$$f_{\sigma''}(x') = \psi(g_{\sigma'',1}, \ldots, g_{\sigma'',p}), \tag{5.8}$$

где ФАЛ $g_{\sigma'',1}, \ldots, g_{\sigma'',p}$ берутся из множества G.

Пусть, далее, СФЭ Σ' содержит СФЭ Σ_G в качестве подсхемы и для каждого σ'', $\sigma'' \in B^{n-q}$, реализует ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ в соответствии с (5.8), используя для этого формулу $\mathcal{F}_t$. Схема Σ_f представляет собой суперпозицию вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, где СФЭ Σ'' — мультиплексор порядка $(n-q)$ от БП x'', и реализует ФАЛ f в соответствии с (5.7). Сложность построенной СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$, с учётом (5.5)–(5.6) будет удовлетворять неравенству

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot t \cdot 2^{n-m} + O\left(2^{n-m} + p \cdot 2^s + p \cdot 2^{s/2+m}\right). \tag{5.9}$$

Из этого неравенства при

$$m = q = \lceil 2 \log n \rceil , \quad s = 2 \left\lceil \frac{n - 3 \log n}{2} \right\rceil \tag{5.10}$$

и при значениях остальных параметров, определённых из (5.3)–(5.4), следует (5.1).

Утверждение доказано. □

Следствие

$$\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(n) \sim \rho_{\mathrm{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

Утверждение 5.2

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её ИКС $\widehat{\Sigma}_f$, $\widehat{\Sigma}_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$, такая, что

$$\mathcal{L}(\widehat{\Sigma}_f) \leqslant \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{3 \log n + O(1)}{n}\right). \tag{5.11}$$

Доказательство.

Найдём среди ФПЭ базиса Б, Б $= \{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^{b}$, элемент $\mathcal{K}_j$, для которого $\hat{\rho}_j = \hat{\rho}_{\text{Б}}$ (см. вопрос 2), то есть

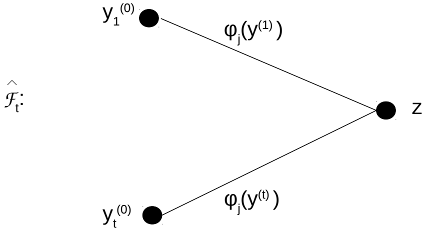
$$\hat{\rho}_j = \frac{\mathcal{L}_j}{k_j + 1} = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \hat{\rho}_i = \hat{\rho}_{\text{Б}},$$

причем в случае $k_j = 0$ ФПЭ $\mathcal{K}_j$ является «вентилем», т. е. ориентированным проводящим ребром (см. вопрос 3), и, следовательно, $\delta_j = 0$, $\varphi_j \equiv 1$.

Пусть, далее, m, s, t, p — натуральные числа такие, что

$$p = t(k_j + 1), \quad k_j \leqslant \frac{2^m}{s} \leqslant p < \frac{2^m}{s} + k_j.$$

Пусть $(t, 1)$-КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ над базисом Б представляет собой «звезду» из t управляемых непересекающимися наборами БП $y^{(1)}, \ldots, y^{(t)}$ длины k_j контактов $\mathcal{K}_j$ (в случае $k_j = 0$ эти наборы будем считать пустыми).



При этом центр звезды является выходом КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$, к которому, в случае $\sigma_j = 0$, направлены дуги контактов $\mathcal{K}_j$, а её концевые вершины — проводящими входами $\widehat{\mathcal{F}}_t$, помеченными различными БП набора $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_t^{(0)})$. Таким образом, КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ реализует ФАЛ

$$\widehat{\psi}(y_1, \ldots, y_p) = y_1^{(0)} \cdot \varphi_j\left(y^{(1)}\right) \vee \ldots \vee y_t^{(0)} \cdot \varphi_j\left(y^{(t)}\right).$$

Обозначим через $\widehat{G}$ стандартное $\widehat{\psi}$-УМ порядка m и высоты s вида (4.6), которое в случае $k_j = 0$ является ДУМ порядка m и ранга t. В остальных случаях построим $\widehat{G}$ на основе соответствующего разбиения куба B^m так, что для любых систем ФАЛ $g^{(1)}, \ldots, g^{(t)}$, взятых из тех компонент $\widehat{G}$, которые связаны с наборами БП $y^{(1)}, \ldots, y^{(t)}$ соответственно и любого набора α значений БП x не более одной из ФАЛ $h^{(i)}(\alpha) = \varphi_j\left(g^{(i)}(\alpha)\right)$, где $i = 1, \ldots, t$, обращается в 1.

Действительно, пусть $M, M \in B^{k_j,k_j}$, — матрица существенной зависимости ФАЛ φ_j, а γ и β — некоторые наборы из B^{k_j} такие, что $\varphi_j(\gamma) = 0$ и $\varphi_j(\beta) = 1$. Тогда аналогичная матрица $\widehat{M}$ для ФАЛ $\widehat{\psi}$, дающая множество $\widehat{G}$ с требуемыми свойствами ортогональности ФАЛ $h^{(i)}(x)$, имеет вид

		$y^{(0)}_1$		$y^{(1)}$			$y^{(0)}_t$		$y^{(t)}$	
		1	2	...	b_j+1		$p-k_j$	$p-k_j+1$	...	p
$y^{(0)}_1$	1	0		β			0		γ	
$y^{(1)}$	2	1		M			0		γ	
	⋮	⋮					⋮			
	k_j+1	1					0		γ	
$y^{(0)}_t$	$p-k_j$	0			0		0		β	
$y^{(t)}$	$p-k_j+1$	0		γ			1		M	
	⋮						⋮			
	p	0		γ			1			

Построим ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ аналогично тому, как строилась СФЭ Σ_f при доказательстве Утв. 5.1, на основе разложений (5.7) и (5.8) с использованием ФАЛ $\widehat{\psi}$ вместо ФАЛ ψ, ИКС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ вместо формулы $\mathcal{F}_t$ и множества $\widehat{G}$ вместо множества G.

Пусть $\lambda = |\widehat{G}|$ и пусть $(1, \lambda)$-КС $\widehat{\Sigma}_G$ построена по Утв. 4.2 из контактов базиса Б, моделирующих замыкающий и размыкающий контакты стандартного базиса (см. вопрос 2), реализует систему из ФАЛ множества $\widehat{G}$ и имеет сложность

$$\mathcal{L}\left(\widehat{\Sigma}_{\widehat{G}}\right) \leqslant O(t \cdot 2^s + t \cdot 2^{m+s/2}). \qquad (5.12)$$

Заметим, что в силу $\widehat{\psi}$-универсальности множества ФАЛ $\widehat{G}$ для любой ФАЛ $g(x')$ справедливо представление

$$g(x') = \widehat{\psi}(g_1, \ldots, g_p) \tag{5.13}$$

где $g_j \in \widehat{G}$ для всех j, $j = 1, \ldots, p$. Для реализации данного представления достаточно входы $y_1, \ldots, y_p$ КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$ присоединить к выходам КС $\widehat{\Sigma}_G$ в соответствии с (5.13). При этом указанная реализация является корректной суперпозицией соответствующих схем либо в силу ориентированности контактов $\mathcal{K}_j$ КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$, которая обязательно имеет место в случае $k_j = 0$, либо в силу отмеченных выше свойств ортогональности ФАЛ $h^{(i)}(x)$ при различных $i, i = 1, \ldots, p$.

Пусть ИКС $\widehat{\Sigma}'$ от БП x' содержит в качестве подсхемы КС $\widehat{\Sigma}_G$ и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих 2^{n-q} выходов согласно (5.13), используя для этого схему $\widehat{\mathfrak{F}}_t$, входы которой присоединены к выходам $\widehat{\Sigma}_G$ соответствующим образом.

Искомая ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ содержит ИКС $\widehat{\Sigma}'$ в качестве подсхемы и представляет собой результат корректной суперпозиции вида $\Sigma_f = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где $\widehat{\Sigma}''$ — $(2^{n-q}, 1)$-КС, моделирующая в базисе Б контактное дерево от БП x'', входы (листья) которого присоединены к выходам $\widehat{\Sigma}'$ в соответствии с (5.7).

Сложности ИКС $\widehat{\Sigma}'$ и КС $\widehat{\Sigma}''$ удовлетворяют неравенствам

$$\mathcal{L}\left(\widehat{\Sigma}'\right) \leqslant \mathcal{L}\left(\widehat{\Sigma}_{\widehat{G}}\right) + 2^{n-q} \cdot t \cdot \mathcal{L}_j, \qquad \mathcal{L}\left(\widehat{\Sigma}''\right) \leqslant O(2^{n-q})$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}\left(\Sigma_f\right) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot 2^{n-q} \cdot t + O\left(2^{n-q}\right) + O\left(2^s \cdot t + t \cdot 2^{q+s/2}\right).$$

Оценка (5.11) получается из последнего неравенства при тех же значениях параметров, что и в теореме 5.1, при которых, начиная с достаточно большого n, выполнены все необходимые соотношения.

Утверждение доказано. □

Следствие

Из (5.11) *с учётом нижней оценки вопроса 3 вытекает соотношение*

$$\mathcal{L}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}(n) \sim \hat{\rho}_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

6. Асимптотически наилучший метод синтеза формул и контактных схем в произвольном базисе

При синтезе СФЭ в базисе $Б = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$ мы использовали некоторые формулы $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$ и $\mathcal{F}_{\neg}$ из $\mathcal{U}_{Б}^{Ф}$, реализующие ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\overline{x}_1$ соответственно, для моделирования конъюнктивных и дизъюнктивных представлений ФАЛ. При этом возможность такого моделирования и его сложность не налагали на данные формулы каких-либо структурных или параметрических ограничений. В то же время при использовании формул $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\neg}$ для аналогичного моделирования конъюнктивных и дизъюнктивных представлений ФАЛ в классе $\mathcal{U}_{Б}^{Ф}$ необходимо обеспечить отсутствие «внутренних» ветвлений в получающихся схемах за счёт определенных ограничений на их структуру.

Напомним, что БП, встречающаяся в записи формулы только один раз, считается **бесповторной** БП этой формулы и что формула, все БП (соответственно, все существенные БП) которой бесповторны, называется **бесповторной** (соответственно, **квазибеспоторной**). В [1] было доказано следующее утверждение.

Утверждение 6.1

Существуют квазибесповторные формулы $\mathcal{F}_{\neg}$, $\mathcal{F}_{\&}$ *и* $\mathcal{F}_{\vee}$ *над базисом* Б, *которые реализуют ФАЛ* $\overline{x}_1$, $x_1 \cdot x_2$ *и* $x_1 \vee x_2$ *соответственно.*

Доказательство.

В силу полноты системы ФАЛ $\{\varphi_i\}_{i=1}^{b}$ можно построить формулы $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ от БП y над Б, которые реализуют константы $0, 1$ и являются квазибесповторными в связи с отсутствием существенных БП. Из полноты следует также, что среди базисных ФАЛ есть немонотонная ФАЛ $\varphi'(x_1, \ldots, x_{k'})$ и нелинейная ФАЛ $\varphi''(x_1, \ldots, x_{k''})$. В силу леммы о немонотонной ФАЛ, найдется набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k'})$ из $B^{k'}$ и число $i, 1 \leqslant i \leqslant k'$, такие, что

$$\varphi'(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k'}) = \overline{x}_i.$$

Следовательно, формула

$$\mathcal{F}_{\neg}(x) = \mathcal{F}_{\neg}(x, y) = \varphi'(\mathcal{F}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\alpha_{i-1}}, x, \mathcal{F}_{\alpha_{i+1}}, \ldots, \mathcal{F}_{\alpha_{k'}})$$

является бесповторной формулой над Б, реализующей ФАЛ $\bar{x}$.

Положим:

$$\mathcal{F}_{\neg}^{(1)}(x, y) = \mathcal{F}_{\neg}(x) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_{\neg}^{(0)}(x, y) = x.$$

Из доказательства леммы о нелинейной ФАЛ следует, что найдется такой набор $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{k''})$ из $B^{k''}$, натуральные числа i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant k''$, а также константа $\gamma, \gamma \in B$, для которых

$$\varphi''(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, x_i \oplus \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{j-1}, x_j \oplus \beta_j, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_{k''}) = x_i \cdot x_j \oplus \gamma.$$

Тогда формула $\mathcal{F}_{\&}$ вида

$$\mathcal{F}_{\&}(x_1, x_2, y) = \mathcal{F}_{\neg}^{(\gamma)}(\varphi''(\mathcal{F}_{\beta_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\beta_{i-1}}, \mathcal{F}_{\neg}^{(\beta_i)}(x_1, y), \mathcal{F}_{\beta_{i+1}}, \ldots, \mathcal{F}_{\beta_{j-1}}, \mathcal{F}_{\neg}^{(\beta_j)}(x_2, y), \mathcal{F}_{\beta_{j+1}}, \ldots, \mathcal{F}_{\beta_{k''}}), y)$$

является квазибесповторной формулой над Б и реализует ФАЛ $x_1 \cdot x_2$. Квазибесповторная формула $\mathcal{F}_{\vee}(x_1, x_2, y)$, которая реализует ФАЛ $x_1 \vee x_2$, получается из формулы

$$\mathcal{F}_{\neg}(\mathcal{F}_{\&}(\mathcal{F}_{\neg}(x_1, y), \mathcal{F}_{\neg}(x_2, y), y), y)$$

«удалением» всех вхождений двух последовательных формул $\mathcal{F}_{\neg}$. Утверждение доказано. $\Box$

Напомним, далее, что (см., например, [1]) множество δ, $\delta \subseteq B^q$ называется m-**регулярным** множеством наборов куба B^q, если $m < q$, $|\delta| = 2^m$ и все префиксы[1] длины m наборов из δ различны. Заметим, что m-регулярному множеству δ, $\delta \subseteq B^q$, можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор $\alpha = (\beta, \gamma)$, где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $g(\beta) = \gamma$. Заметим также, что любая ФАЛ g, $g \in P_2(q)$, совпадает на m-регулярном множестве наборов δ, $\delta \subseteq B^q$, с некоторой ФАЛ из $P_2(m)$, если рассматривать $P_2(m)$ как множество всех ФАЛ из $P_2(q)$ с несущественными БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$. При этом любая ФАЛ из связанной с δ системы функций совпадает на δ с соответствующей БП куба B^q.

[1]Для слова (набора) α вида $\alpha = \beta\gamma$ слово β (γ) считается его префиксом (соответственно суффиксом).

Распространим операцию сложения двоичных наборов (слов) по модулю 2 на тот случай, когда длина второго слагаемого может быть больше длины первого. Для наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in B^m$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B^n$, где $n \geqslant m$, определим их сумму $\alpha \oplus \beta$ как набор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in B^n$, который представляет собой поразрядную сумму по модулю 2 префикса длины n набора $\underbrace{(\alpha, \ldots, \alpha)}_{a \text{ раз}}$, где $a = \lceil n/m \rceil$, с набором β и заметим, что при этом уравнение $\alpha \oplus \beta = \gamma$ имеет единственное относительно β решение при любых α, $\alpha \in B^m$, и γ, $\gamma \in B^n$.

На основе введённой операции при любых β, $\beta \in B^t$, и $\lambda \leqslant t$ обычным образом определяется сумма $\delta \oplus \beta$, где $\delta \subseteq B^\lambda$, а также сумма $g \oplus \beta$, где $g = (g_1, \ldots, g_\lambda) \in P_2^\lambda(m)$. При этом последняя сумма является набором длины t, который по-прежнему состоит из ФАЛ системы g или их отрицаний и задаёт m-регулярное множество наборов куба B^t. Заметим также, что любая ФАЛ системы g хотя бы один раз входит в систему $g \oplus \beta$ без отрицания, если для каждого i, $i = 1, \ldots, \lambda$, хотя бы один из разрядов набора β с номером $i + \lambda \cdot j$, где $0 \leqslant j \leqslant \lceil t/\lambda \rceil$ и $i + \lambda \cdot j \leqslant t$, равен 0.

Пусть $G \subseteq P_2(m)$ и $|G| = \lambda$, а $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$, где $q > m$, — разбиение куба B^q на m-регулярные компоненты. Будем говорить, что разбиение Δ *моделирует ФАЛ из G с помощью БП или их отрицаний*, если для любого i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, любая ФАЛ g, $g \in G$, совпадает на δ_i с некоторой буквой x_j^σ, где $1 \leqslant j \leqslant q$ и $\sigma \in B$. Компонента δ_i считается при этом *хорошей компонентой* разбиения Δ (относительно множества G) в том случае, когда для любой ФАЛ g, $g \in G$, указанное совпадение имеет место при $\sigma = 1$.

Утверждение 6.2

Пусть $G \subseteq P_2(m)$, $|G| = \lambda$, $q = m + a\lambda$ *и пусть* δ_i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, *— m-регулярное разбиение куба* B^q, *которое соответствует системе ФАЛ* $\overrightarrow{G} \oplus \beta$, *где* $\beta \in B^{q-m}$ *и* $\nu(\beta) = i - 1$. *Тогда система множеств* $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ *образует m-регулярное разбиение куба* B^q, *которое моделирует ФАЛ из* G *с помощью БП или их отрицаний и имеет при этом долю «плохих» компонент не больше, чем* $\frac{\lambda}{2^a}$.

Доказательство.

Покажем сначала, что система множеств Δ является разбиением куба B^q. Для этого в силу того, что мощность каждого из них равна 2^m, достаточно убедиться в том, что Δ — покрытие куба B^q, то есть любой набор γ, $\gamma \in B^q$, входит хотя бы в одно из множеств δ_i, $i \in [1, 2^{q-m}]$.

Действительно, представим набор γ в виде $\gamma = (\alpha, \hat{\gamma})$, где $\alpha \in B^m$, и найдём набор β, $\beta \in B^{q-m}$, который является единственным решением уравнения $\overrightarrow{G}(\alpha) \oplus \beta = \hat{\gamma}$. Следовательно, $\gamma \in \delta_i$, где $\nu(\beta) = i - 1$, и система множеств Δ является разбиением куба B^q.

Заметим, что в силу отмеченных выше свойств операции сложения по модулю 2, разбиение Δ обладает всеми необходимыми для моделирования множества ФАЛ G свойствами, и что при этом число его «плохих» компонент не больше, чем $\lambda \cdot 2^{q-m-a}$.

Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 6.3

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ существует реализующая её формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, такая, что

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}_f) \leqslant \rho_{\text{Б}} \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{\log \log n + O(1)}{\log n}\right). \tag{6.1}$$

Доказательство.

Выберем ФЭ $\mathcal{E}_j$, введём натуральные параметры m, s, t, p, l, λ и определим разбиение П, формулу $\mathcal{F}_t$, ФАЛ ψ, ψ-УМ G порядка m так, как это было сделано в доказательстве Утв. 5.1 и так, чтобы выполнялись соотношения (5.2)–(5.5) и (4.7).

Выберем, далее, натуральные параметры q и a так, что

$$q = m + a\lambda \leqslant n \tag{6.2}$$

и построим по Утв. 6.2 для множества ФАЛ G соответствующее m-регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x' = (x_1 \ldots x_q)$. Заметим, что для произвольной ФАЛ $g(x')$ и любого i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, в силу ψ-универсальности множества G, m-регулярности разбиения Δ и возможности моделировать ФАЛ из G на компонентах Δ с помощью БП или их отрицаний всегда найдутся такие натуральные числа $j_1, \ldots, j_p$ из $[m+1, q]$ и булевы константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, которые равны 1, если δ_i — «хорошая» компонента, и для которых равенство

$$g(x') = \psi\left(x_{j_1}^{\alpha_1}, \ldots, x_{j_p}^{\alpha_p}\right) \tag{6.3}$$

выполняется на любом наборе из δ_i.

Возьмём (см. (5.7)) разложение ФАЛ f по БП $x'' = (x_{q+1} \dots x_n)$ и продолжим его на основе (6.3) так, что

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot f_{\sigma''}(x') = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x_i) \cdot \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot \psi\left(x_{j_{1,i,\sigma''}}^{\alpha_{1,i,\sigma''}}, \dots, x_{j_{j,i,\sigma''}}^{\alpha_{p,i,\sigma''}}\right), \tag{6.4}$$

где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i разбиения Δ. Искомая формула $\mathcal{F}_f$ получается из последнего представления (6.4) ФАЛ f следующим образом:

1) характеристическая ФАЛ χ_i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, реализуется по своей совершенной ДНФ;
2) мультиплексорная ФАЛ μ_{n-q} порядка $(n-q)$ от адресных БП x'', связанная с разложением f по этим БП, реализуется с помощью бесповторной по информационным БП формулы из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$ сложности не больше, чем $4 \cdot 2^{n-q}$ (см. [2]);
3) каждая ФАЛ вида (6.3) реализуется одной формулой $\mathcal{F}_p$ с необходимыми инверсиями её БП в случае «плохой» компоненты δ_i;
4) все используемые при реализации формул из пунктов 1-3 элементы базиса Б_0 заменяются соответствующими им бесповторными формулами $\mathcal{F}_{\&}$, $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\neg}$ из Утв. 6.1.

Для сложности построенной таким образом формулы $\mathcal{F}_f$ будет (ср. с (5.9)) справедливо неравенство

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{F}_f\right) \leqslant \mathcal{L}_j \cdot t \cdot 2^{n-m} + O\left(2^{n-m}\left(1 + \frac{t \cdot \lambda}{2^a}\right) + q \cdot 2^q\right), \tag{6.5}$$

которое при значениях параметров

$$m = \lfloor 3 \log \log n \rfloor, \qquad s = \lfloor \log n - 3 \log \log n \rfloor - 1, \qquad a = \lceil \log n \rceil - 1$$

удовлетворяющих при достаточно больших n условиям (6.2), даёт оценку (6.1).

Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 6.4

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её КС Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\text{К}}_{\text{Б}}$, такая, что

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)\right). \tag{6.6}$$

Доказательство.

Найдём среди ФПЭ базиса Б, Б $= \{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^{b}$, элемент $\mathcal{K}_j$, для которого $\mathcal{L}_j = \pi_{\text{Б}}$ (см. вопросы 2, 3), то есть

$$\mathcal{L}_j = \min_{1 \leqslant i \leqslant b} \mathcal{L}_i = \pi_{\text{Б}}.$$

В том случае, когда $\varphi_j \equiv 1$, то есть ФПЭ $\mathcal{K}_j$ является вентилем, искомая КС Σ_f была построена при доказательстве Утв. 5.2. В остальных случаях ФАЛ φ_j существенно зависит хотя бы от одной БП.

Пусть для определённости, из базисной ФАЛ φ_j (см. вопрос 3) подстановкой констант можно получить ФАЛ x_1, а из ФАЛ φ_r, $1 \leqslant r \leqslant b$, — ФАЛ $\overline{x}_1$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$ получающиеся при этом из $\mathcal{K}_j$ и $\mathcal{K}_r$ замыкающий и размыкающий контакты соответственно и положим $\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_j$, $\check{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_r$.
Будем строить КС Σ_f из контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$ в соответствии с асимптотически наилучшим методом синтеза КС в стандартном базисе (см. [1]) с использованием Утв. 6.2 для того, чтобы долю контактов $\check{\mathcal{K}}$ в Σ_f можно было сделать бесконечно малой.
Пусть m, s и t — натуральные числа такие, что

$$s \leqslant 2^m, \qquad t = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \tag{6.7}$$

а $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_t)$ — разбиение куба B^m на последовательные отрезки длины не больше, чем s.

Обозначим через G стандартное ДУМ порядка m и ранга t от БП $(x_1, \ldots, x_m)$, которое связано с разбиением П, и пусть

$$\lambda = |G| \leqslant t \cdot 2^s, \tag{6.8}$$

а $h_1, \ldots, h_t$ — входящие в него характеристические ФАЛ отрезков $\pi_1, \ldots, \pi_t$ соответственно. Напомним, что при этом $G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(t)}$, где $G^{(i)}$, $i = 1, \ldots, t$, состоит из всех ФАЛ g, для которых $g \leqslant h_i$.

Введём натуральный параметр a, положим

$$q = m + a \cdot \lambda \leqslant n \tag{6.9}$$

и рассмотрим разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x' = (x_1, \ldots, x_q)$ на m-регулярные компоненты, построенное по Утв. 6.2 для системы ФАЛ $h = (h_1, \ldots, h_t)$.

Пусть по-прежнему (см. вопрос 5) $\widehat{\mathcal{F}}_t$ — $(t,1)$-КС из t контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ от БП $y^{(0)} = (y_1, \ldots, y_t)$, соответствующих её «проводящим» входам и БП $y^{(1)} = (y_{t+1}, \ldots, y_{2t})$, управляющих её контактами, которая реализует ФАЛ

$$\widehat{\psi}(y^{(0)}, y^{(1)}) = y_1 y_{t+1} \vee \ldots \vee y_t y_{2t}.$$

Заметим, что любая ФАЛ $g(x')$ на любой компоненте δ_i разбиения Δ совпадает с ФАЛ

$$g_i(x') = \widehat{\psi}\left(g_{i,1}, \ldots, g_{i,t},\; x_{j_{i,1}}^{\tau_{i,1}}, \ldots, x_{j_{i,t}}^{\tau_{i,t}}\right), \tag{6.10}$$

где $g_{i,r} \in G^{(r)}$, $m+1 \leqslant j_{i,r} \leqslant q$ и $\tau_{i,r} \in B$ при всех r, $r = 1, \ldots, t$, причём $\tau_{i,1} = \ldots = \tau_{i,t} = 1$, если δ_i — «хорошая» компонента.

Полагая, как и раньше, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$, разложим реализуемую ФАЛ $f(x', x'')$ следующим образом

$$f(x', x'') = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \Big(\bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot f_{\sigma'', i}(x') \Big), \tag{6.11}$$

где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i, $i = 1, \ldots, 2^t$, а ФАЛ $f_{\sigma'', i}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, имеет вид правой части равенства (6.10) для ФАЛ $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$.

Пусть $(1, \lambda)$-КС Σ_G, построенная из контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ и $\check{\mathcal{K}}$, реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{G}$ на основе совершенных ДНФ входящих в неё ФАЛ с использованием контактного дерева от БП $(x_{,} \ldots, x_m)$ со сложностью

$$\mathcal{L}(\Sigma_G) \leqslant \left(\widehat{\mathcal{L}} + \check{\mathcal{L}} \right) \cdot 2^m. \tag{6.12}$$

Пусть, далее, для каждого i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, $(1, 2^{n-q})$-КС Σ_i' содержит КС Σ_G в качестве своей подсхемы и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma'',i}$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих выходов в соответствии с (6.10). Для этого используется либо КС $\widehat{\mathcal{F}}_t$, если δ_i — «хорошая» компонента, либо КС, которая получается из $\widehat{\mathcal{F}}_t$ заменой части контактов $\widehat{\mathcal{K}}$ контактами $\check{\mathcal{K}}$, в остальных случаях. Заметим, что указанные схемы являются разделительными по входам на компоненте δ_i, что обеспечивает корректность применяемых операций суперпозиции на ней. Определим $(1, 2^{n-m})$-КС Σ' как КС, которая получается отождествлением входов у всех КС Σ_i', $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, и реализует на своих 2^{n-m} выходах все ФАЛ вида $f_{\sigma'',i}(x')$.

Рассмотрим теперь $(2^{q-m},1)$-КС $\widetilde{\Sigma}$, которая получается из $(2^q,1)$-КД от БП x' отождествлением для каждого i, $i=1,\ldots,2^{q-m}$, тех его листьев, которые соответствуют конъюнкциям вида $x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot x_q^{\sigma_q}$, где $(\sigma_1,\ldots,\sigma_q)\in\delta_i$. Построим, наконец, $(2^{n-m},1)$-КС Σ'', которая получается в результате присоединения к каждому входу КС $\widetilde{\Sigma}$ выхода (корня) $(2^{n-q},1)$-контактного дерева от БП x''. Заметим, что все операции суперпозиции, использованные при построении КС Σ'', являются корректными и поэтому Σ'' разделительна по входам, а система ФАЛ проводимости между её входами и выходом состоит из всех ФАЛ вида $\chi_i(x')\cdot K_{\sigma''}(x'')$, где $i\in[1,2^{q-m}]$ и $\sigma''\in B^{n-q}$.

Искомая КС Σ_f содержит КС Σ' в качестве подсхемы и представляет собой результат суперпозиции вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, при выполнении которой входы Σ'' присоединяются к выходам Σ' в соответствии с (6.11). В силу разделительности КС Σ'' по входам указанная суперпозиция является корректной и поэтому КС Σ_f действительно реализует ФАЛ f.

Из (6.7)–(6.9), (6.12) с учётом того, что число контактов в контактном дереве от d БП равно $2^{d+1} - 2$, вытекает неравенство (ср. с (6.5))

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leqslant \widehat{\mathcal{L}} \cdot 2^{n-m} \cdot t + O\big(2^q + 2^{n-m}\big(1 + \frac{t \cdot \lambda}{2^a}\big)\big).$$

Оценка (6.6) получается из последнего неравенства при следующих значениях параметров

$$a = \lfloor \log n \rfloor, \qquad m = \left\lfloor \frac{3}{2} \log n \right\rfloor, \qquad s = \left\lceil n - 3a\sqrt{n} \right\rceil,$$

при которых, начиная с достаточно большого n, выполнены все необходимые соотношения и, в частности, неравенства (6.9).

Утверждение доказано. □

Следствие

Из (6.6) с учётом нижней оценки вопроса 3 вытекает соотношение

$$L_{\text{Б}}^{\text{К}}(n) \sim \pi_{\text{Б}} \frac{2^n}{n}.$$

- *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики. М.: МГУ, 2004. (Электронные версии лекций последних лет можно найти по адресу http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(2-й_поток,_3_курс)).
- *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007.