Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 2

Логика высказываний:
синтаксис, семантика

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

$$\underbrace{\textbf{Если будете прогуливать лекции, то ничего хорошего из этого не выйдет}}_{A}$$

Можно ли сказать, что это «простое высказывание»?

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$\rightarrow$

Здесь есть причинно-следственная связь ...

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\mathtt{A} \rightarrow \quad \mathtt{B}$$

... между двумя простыми высказываниями

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\mathtt{A} \to \neg\, \mathtt{B}$$

А одно из высказываний можно сделать ещё проще

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\boxed{A \to \neg B}$$

Логика высказываний: вступление

После формализации высказывания получилось что-то
очень похожее на **формулу булевой алгебры**, но не совсем:

Какой смысл имеет построенное высказывание?

Булева алгебра: значение формулы — это булева функция:

A	B	$A \to \neg B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Логика высказываний: **?**

Основные три составляющие формального языка,
которые дальше будут введены и для языка логики высказываний:

- алфавит: набор символов (букв), используемых в языке
- синтаксис: правила, по которым из символов строятся высказывания языка (**формулы**)
- семантика: значение этих высказываний

Логика высказываний: алфавит

Алфавит логики высказываний состоит из следующих символов:

1. Пропозициональные переменные
   - Будем считать, что в алфавите содержится счётное число таких переменных
   - Var — множество всех пропозициональных переменных
2. Логические связки:

Конъюнкция	(логическое И):	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ):	$\vee$
Отрицание	(логическое НЕ):	$\neg$
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО):	$\to$

3. Скобки:

$$(\quad)$$

Синтаксис и БНФ

Синтаксис:

- $\sigma\acute{\upsilon}\nu\tau\alpha\xi\iota\varsigma$ (древнегреческий) — строй, организация, конструкция[1]
- система языковых категорий, относящихся к соединениям слов и строению предложений[2]

Для задания синтаксиса в курсе будут использоваться формы Бэкуса-Наура (БНФ):

```
что-то ::= запись1 | запись2 | ... | записьN
```

Прочтение такой БНФ:

- *Запись1* — это *что-то*
- *Запись2* — это *что-то*

  ...
- *ЗаписьN* — это *что-то*
- Других способов записи *чего-то* нет

1 Дворецкий. Древнегреческо-русский словарь

2 Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Логика высказываний: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики высказываний:

$$\varphi \ ::= \ \mathtt{x} \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi),$$

где φ — формула и $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$

Формула вида $\mathtt{x}$, $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$, называется атомарной (атомом),
а остальные формулы $((\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\neg\varphi))$ — составными

$\varphi = \psi$ — так в курсе будет обозначаться
посимвольное (синтаксическое) совпадение формул φ и ψ
(и других строковых записей)

Приоритет связок по убыванию: $\neg$, затем $\&$, затем $\vee$, затем $\to$

Скобки в записи формул можно опускать согласно приоритету связок,
а также согласно ассоциативности связок $\&$ и $\vee$:

$$A \,\&\, \neg B \,\&\, C \to D \vee E = ((A \,\&\, ((\neg B) \,\&\, C)) \to (D \vee E))$$

Логика высказываний: семантика

Семантика:

- $\sigma\eta\mu\alpha\nu\tau\upsilon\kappa\acute{o}\varsigma$ (древнегреческий) — обозначающий, значимый[1]
- значение, смысл языковой единицы[2]

Основные логические значения, на которых основана семантика формул: $\mathbb{t}$ — истина; $\mathbb{f}$ — ложь

Значение формулы однозначно определяется значениями её атомов

Значение $\mathcal{I}(\mathrm{x})$ атома x задаётся интерпретацией $\mathcal{I} : \mathsf{Var} \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$

Значение $\mathcal{I}(\varphi)$ составной формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ задаётся так:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{I}(\varphi \,\&\, \psi) = \mathbb{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} \text{ и } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t} \\
\mathcal{I}(\varphi \vee \psi) = \mathbb{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t} \\
\mathcal{I}(\varphi \to \psi) = \mathbb{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t} \\
\mathcal{I}(\neg\varphi) = \mathbb{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f}
\end{array}$$

В логике принято использовать немного другие обозначения:

$$\begin{array}{lcll}
\mathcal{I} \models \varphi & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} & \text{(формула } \varphi \text{ выполняется в } \mathcal{I}\text{)} \\
\mathcal{I} \not\models \varphi & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f} & \text{(формула } \varphi \text{ не выполняется в } \mathcal{I}\text{)}
\end{array}$$

---

1 Дворецкий. Древнегреческо-русский словарь

2 Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Логика высказываний: семантика

Пример

$$\mathsf{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \dots\} \qquad \varphi = \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B} \qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f},\ \mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \models \mathtt{B}$ $\quad$ $\mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B}$ $\quad$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$)

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A}$ $\quad$ $\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\quad$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$)

Содержательное пояснение

Пусть $\mathtt{A}$ — высказывание «Я прогуливаю лекции»
$\mathtt{B}$ — высказывание «Из этого выйдет что-то хорошее»

Тогда $\mathcal{I}$ — это мир, в котором я живу:

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A}$: я прилежно хожу на лекции

$\mathcal{I} \models \mathtt{B}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал
«Если я прогуливаю лекции,
то из этого не выйдет ничего хорошего», **прав**

Логика высказываний: семантика

Пример

$$\mathsf{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \dots\} \qquad \varphi = \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B} \qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f},\ \mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{f}$$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{B} \qquad \mathcal{I} \models \neg\mathtt{B} \qquad$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{f}$)

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A} \qquad \mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B} \qquad$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$)

Содержательное пояснение

Пусть $\mathtt{A}$ — высказывание «Я прогуливаю лекции»
$\mathtt{B}$ — высказывание «Из этого выйдет что-то хорошее»

Тогда $\mathcal{I}$ — это мир, в котором я живу:

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A}$: я прилежно хожу на лекции

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{B}$: из этого не выйдет ничего хорошего

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал
«Если я прогуливаю лекции,
то из этого не выйдет ничего хорошего», **прав**

Логика высказываний: семантика

Пример

$\mathsf{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \dots\}$ $\quad\quad \varphi = \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\quad\quad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{t}, \mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \models \mathtt{B}$ $\quad \mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B}$ $\quad$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$)

$\mathcal{I} \models \mathtt{A}$ $\quad \mathcal{I} \not\models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ $\quad$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{t}$ *и* $\mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B}$)

Содержательное пояснение

Пусть $\mathtt{A}$ — высказывание «Я прогуливаю лекции»
$\mathtt{B}$ — высказывание «Из этого выйдет что-то хорошее»

Тогда $\mathcal{I}$ — это мир, в котором я живу:

$\mathcal{I} \models \mathtt{A}$: я прогуливаю лекции

$\mathcal{I} \models \mathtt{B}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал
«Если я прогуливаю лекции,
то из этого не выйдет ничего хорошего», **неправ**