Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\rightarrow$ Лекционные курсы $\rightarrow$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 2

Логика высказываний:
синтаксис, семантика,
выполнимость, общезначимость

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

$$\underbrace{\textbf{Если будете прогуливать лекции, то ничего хорошего из этого не выйдет}}_{A}$$

Можно ли сказать, что это “простое высказывание”?

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$\rightarrow$

Здесь есть причинно-следственная связь ...

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- "простых" высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- "булевых" причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\mathtt{A} \to \quad \mathtt{B}$$

... между двумя простыми высказываниями

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- "простых" высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- "булевых" причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$A \rightarrow \neg B$$

А одно из высказываний можно сделать ещё проще

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$\boxed{\mathtt{A} \to \neg\, \mathtt{B}}$$

Логика высказываний: вступление

После формализации высказывания получилось что-то
очень похожее на **формулу булевой алгебры**, но не совсем:

Какой смысл имеет построенное высказывание?

Булева алгебра:

значение формулы — это булева функция:

A	B	$A \to \neg B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Логика высказываний: **?**

Для языка логики высказываний будут описаны

алфавит: набор символов, используемых в языке

синтаксис: правила, по которым из символов строятся высказывания языка (**формулы**)

семантика: значение этих высказываний

После этого будут строго сформулированы
основные логические свойства формул:

выполнимость, невыполнимость, общезначимость

Логика высказываний: алфавит

Алфавит логики высказываний состоит из следующих символов:

1. Пропозициональные переменные
   - Будем считать, что в алфавите содержится *счётно-бесконечное* число таких переменных
   - Var — множество всех пропозициональных переменных
2. Логические связки:

Конъюнкция	(логическое И):	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ):	$\vee$
Отрицание	(логическое НЕ):	$\neg$
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО):	$\to$

3. Скобки:

$$(\quad)$$

Синтаксис и БНФ

Синтаксис — составление, построение, порядок;[1]
раздел грамматики — наука о
законах соединения слов и строении предложения[2]

Для задания синтаксиса в курсе будут использоваться *формы Бэкуса-Наура* (БНФ):

`что-то ::= запись1 | запись2 | ... | записьN`,

Прочтение такой БНФ:

- *Запись1* — это *что-то*
- *Запись2* — это *что-то*

  ...
- *ЗаписьN* — это *что-то*
- Других способов записи *чего-то* нет

[1] $\sigma\upsilon\nu\tau\alpha\xi\iota\sigma$ (древнегреческий)
[2] Ожегов. Толковый словарь

Логика высказываний: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики высказываний:

$$\varphi \;::=\; \mathtt{x} \;\mid\; (\varphi \,\&\, \varphi) \;\mid\; (\varphi \vee \varphi) \;\mid\; (\varphi \to \varphi) \;\mid\; (\neg\varphi),$$

где φ — формула и $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$

Формула вида $\mathtt{x}$, $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}$, называется атомарной (атомом),
а остальные формулы ($(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\neg\varphi)$) — составными

$\varphi = \psi$ — так в курсе будет обозначаться
посимвольное (синтаксическое) совпадение формул φ **и** ψ

Приоритет связок по убыванию: $\neg$, затем $\&$, затем $\vee$, затем $\to$

Скобки в записи формул можно опускать согласно приоритету связок,
а также согласно ассоциативности связок $\&$ и $\vee$:

$$A \,\&\, \neg B \,\&\, C \to D \vee E = ((A \,\&\, ((\neg B) \,\&\, C)) \to (D \vee E))$$

Логика высказываний: семантика

Семантика — значение, смысл[1]

Основные логические значения, на которых основана семантика формул:

$\mathbb{t}$ — истина; $\mathbb{f}$ — ложь

Значение формулы однозначно определяется значениями её атомов

Значения атома задаётся интерпретацией — отображением

$$\mathcal{I} : \mathsf{Var} \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$$

Значение $\mathcal{I}(\varphi)$ составной формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ задаётся так:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{I}(\varphi \mathbin{\&} \psi) = \mathbb{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} \text{ и } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t} \\
\mathcal{I}(\varphi \vee \psi) = \mathbb{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t} \\
\mathcal{I}(\varphi \to \psi) = \mathbb{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t} \\
\mathcal{I}(\neg\varphi) = \mathbb{t} & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f}
\end{array}$$

В логике принято использовать немного другие обозначения:

$$\begin{array}{lcll}
\mathcal{I} \models \varphi & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} & \text{(формула } \varphi \text{ выполняется в } \mathcal{I}) \\
\mathcal{I} \not\models \varphi & \Leftrightarrow & \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f} & \text{(формула } \varphi \text{ не выполняется в } \mathcal{I})
\end{array}$$

[1] Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Логика высказываний: семантика

Пример

$$\mathsf{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \dots\} \qquad \varphi = \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B} \qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f},\ \mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$)

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$)

Содержательное пояснение

Пусть $\mathtt{A}$ — высказывание “Я прогуливаю лекции”
$\mathtt{B}$ — высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

Тогда $\mathcal{I}$ — мир, в котором я живу:
$\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$: я прилежно хожу на лекции
$\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал
“Если я прогуливаю лекции,
то из этого не выйдет ничего хорошего”, **прав**

Логика высказываний: семантика

Пример

$$\mathsf{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \dots\} \qquad \varphi = \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B} \qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f},\ \mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{f}$$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \models \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{f}$)

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$)

Содержательное пояснение

Пусть $\mathtt{A}$ — высказывание "Я прогуливаю лекции"
$\mathtt{B}$ — высказывание "Из этого выйдет что-то хорошее"

Тогда $\mathcal{I}$ — мир, в котором я живу:
$\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{f}$: я прилежно хожу на лекции
$\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{f}$: из этого не выйдет ничего хорошего

$\mathcal{I} \models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал
"Если я прогуливаю лекции,
то из этого не выйдет ничего хорошего", **прав**

Логика высказываний: семантика

Пример

$$\mathrm{Var} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \dots\} \qquad \varphi = \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B} \qquad \mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{t},\ \mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$$

Имеет место следующее:

$\mathcal{I} \not\models \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$)

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$ (так как $\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{t}$ *и* $\mathcal{I}(\neg\mathtt{B}) = \mathbb{f}$)

Содержательное пояснение

Пусть $\mathtt{A}$ — высказывание “Я прогуливаю лекции”
$\mathtt{B}$ — высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

Тогда $\mathcal{I}$ — мир, в котором я живу:
$\mathcal{I}(\mathtt{A}) = \mathbb{t}$: я прогуливаю лекции
$\mathcal{I}(\mathtt{B}) = \mathbb{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \not\models \mathtt{A} \to \neg\mathtt{B}$: тот, кто сказал
“Если я прогуливаю лекции,
то из этого не выйдет ничего хорошего”, **неправ**

Выполнимость и общезначимость

Основные свойства формул,
которые обычно исследуются в логике высказываний:

- Формула φ выполнима ($|\models \varphi$[1]), если существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \models \varphi$
- Формула φ невыполнима ($|\not\models \varphi$[1]), если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- Формула φ общезначима ($\models \varphi$), если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Логика высказываний		*Булева алгебра*
φ выполнима	$\Leftrightarrow$	φ выполнима
φ невыполнима	$\Leftrightarrow$	φ — тождественный ноль
φ общезначима	$\Leftrightarrow$	φ — тождественная единица

[1] Это необщеупотребимое обозначение, используется **только** мной в слайдах по этому курсу

Выполнимость и общезначимость

Выполнимость, невыполнимость и общезначимость —
это “почти одно и то же”:

$$
\begin{tikzcd}
\text{формула } \varphi \text{ выполнима} \arrow[d, leftrightarrow, "\begin{array}{l}\varphi = \psi \\ \text{выдать противоположный ответ}\end{array}"] \\
\text{формула } \psi \text{ невыполнима} \arrow[d, bend left, "\chi = \neg\psi"] \\
\text{формула } \chi \text{ общезначима} \arrow[u, bend left, "\psi = \neg\chi"]
\end{tikzcd}
$$

Проверка каждого из этих свойств может быть легко **сведена**
к проверке каждого другого свойства

Выполнимость и общезначимость

Выполнимость, невыполнимость и общезначимость —
это “почти одно и то же”:

$$\begin{tikzcd}
\text{формула } \varphi \text{ выполнима} \arrow[d, leftrightarrow, "\begin{array}{l}\varphi = \psi \\ \text{выдать противоположный ответ}\end{array}"] \\
\text{формула } \psi \text{ невыполнима} \arrow[d, bend left, "\chi = \neg\psi"] \\
\text{формула } \chi \text{ общезначима} \arrow[u, bend left, "\psi = \neg\chi"]
\end{tikzcd}$$

Проверка каждого из этих свойств может быть легко **сведена**
к проверке каждого другого свойства

Поэтому в логике нередко рассматривается только одно из этих свойств,
и обычно это свойство **общезначимости**