Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 45

Темпоральные логики

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

Темпоральные логики

Темпоральная логика (логика времени) — это разновидность модальной логики, в которой модальности $\Box$ и $\Diamond$ означают «всегда [в будущем]» и «иногда [в будущем]»

Шкалой Крипке темпоральной логики описывается течение времени: миры — это моменты времени, а отношением достижимости миров описывается порядок смены моментов времени

Пример: шкала дискретного линейного отсчёта времени

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] \arrow[rrr, bend right] \arrow[rrrr, bend right] & 2 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] \arrow[rrr, bend right] & 3 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & 4 \arrow[loop above] \arrow[r] & 5 \arrow[loop above] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Пропозициональные переменные формул темпоральных логик — это атомарные высказывания, истинность которых может изменяться с течением времени

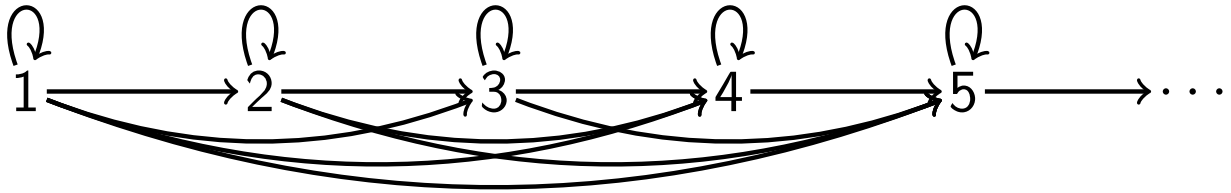
Темпоральные логики

Время может истолковываться по-разному, и в зависимости от истолкования (*то есть точного вида рассматриваемых шкал*) могут получаться разные темпоральные логики, например:

- Логика линейного времени
  (**LTL**, **L**inear **T**emporal **L**ogic)
  - время дискретно линейно течёт вперёд
  - формула — это свойство линейного развития событий
- Логика деревьев вычислений
  (**CTL**, **C**omputation **T**ree **L**ogic)
  - время — это частично упорядоченное множество, которым описываются все варианты развития событий
  - формула — это высказывание о возможности и невозможности заданного развития событий с учётом всех вариантов

Логика линейного времени (LTL)

LTL-шкала — это естественно упорядоченный натуральный ряд (моментов времени):



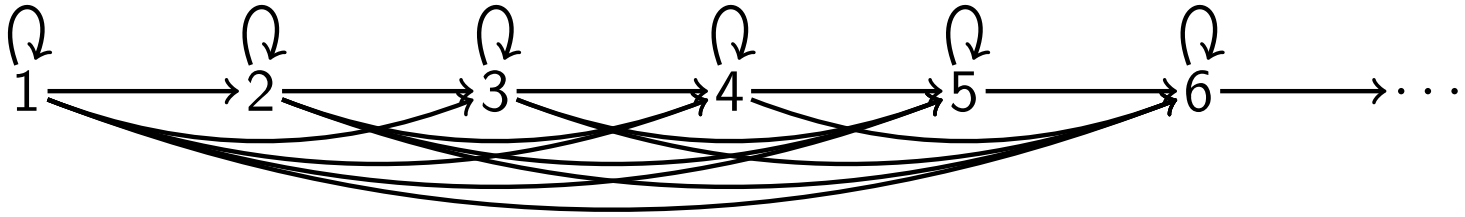
LTL-интерпретация — это модель Крипке, основанная на LTL-шкале

Модальности $\Box$ и $\Diamond$ в LTL обычно обозначаются символами
G (**G**lobally) и **F** (in **F**uture)

К ним могут добавляться и другие модальности, описывающие те или иные взаимосвязи между высказываниями в неуклонно текущем времени

Логика линейного времени (LTL)

Пример:



Логика линейного времени (LTL)

Пример: рассмотрим такую LTL-интерпретацию $\mathcal{I}$
с оценкой атомарных высказываний, повторяющейся с периодом 4:

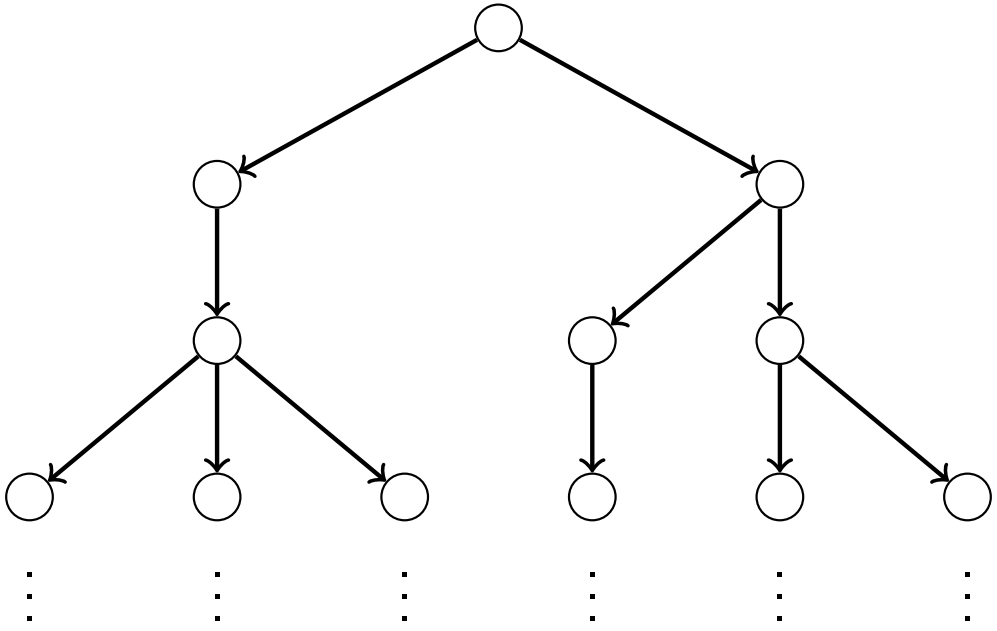
$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & \cdots \\ \emptyset & & \{q\} & & \{p\} & & \{p,q\} & & \emptyset & & \{q\} & & \end{array}$$

Справедливы следующие соотношения:

- в момент времени 1 неверно p и верно $p \to q$
$$\mathcal{I}, 1 \not\models p, \qquad \mathcal{I}, 1 \models p \to q$$
- p иногда бывает верным, но не всегда
$$\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{F}p, \qquad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{G}p$$
- p бесконечно часто бывает верным,
но нет такого момента, начиная с которого p всегда верно
$$\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{GF}p, \qquad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{FG}p$$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Течение времени в CTL описывается ориентированным деревом, содержащим только бесконечные ветви:



CTL-шкала — это шкала Крипке,
являющаяся рефлексивно-транзитивным замыканием такого дерева

CTL-интерпретация — это модель Крипке, основанная на CTL-шкале

Логика деревьев вычислений (CTL)

В логике деревьев вычислений модальности $\Box$, $\Diamond$
обозначаются записями **AG** (for **A**ll paths **G**) и **EF** (**E**xists path such that **F**)

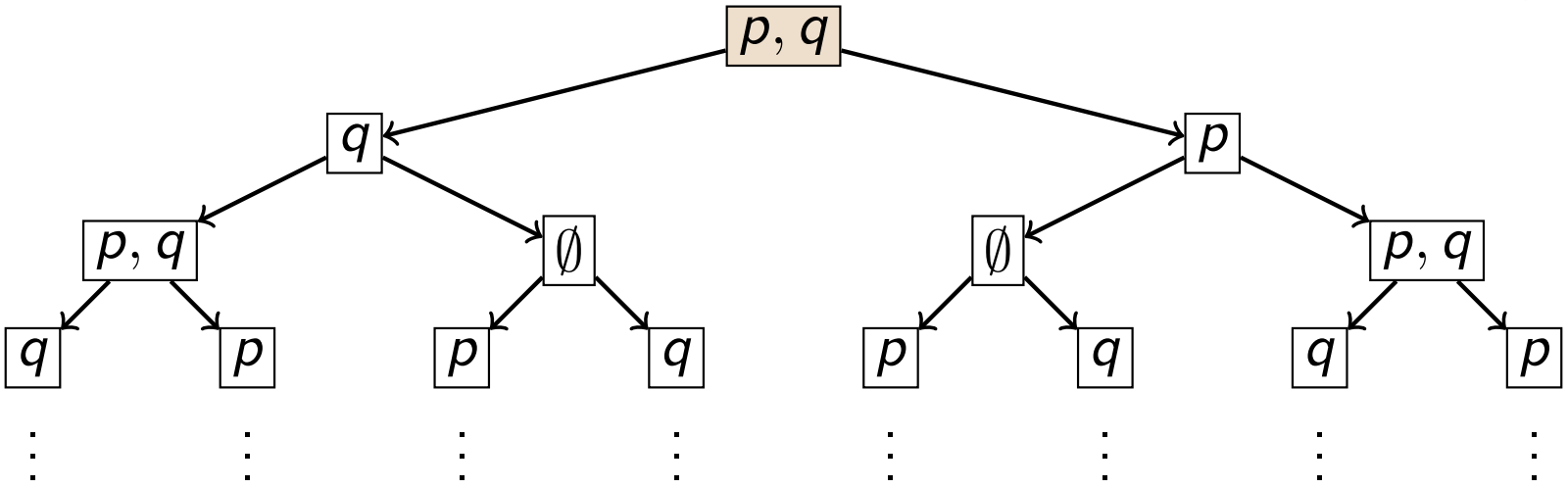
CTL содержит и другие модальности — например, **EG** и **AF**

Смысл этих модальностей определяется так:

- $\mathcal{I}, v \models \mathbf{EG}\varphi \Leftrightarrow$ существует ветвь дерева, исходящая из v и такая что для каждой вершины w этой ветви верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$
- $\mathcal{I}, v \models \mathbf{AF}\varphi \Leftrightarrow$ в каждой ветви дерева, исходящей из v, существует вершина w, такая что $\mathcal{I}, w \models \varphi$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую CTL-интерпретацию $\mathcal{I}$
(при переходе влево изменяется значение p, вправо — значение q):

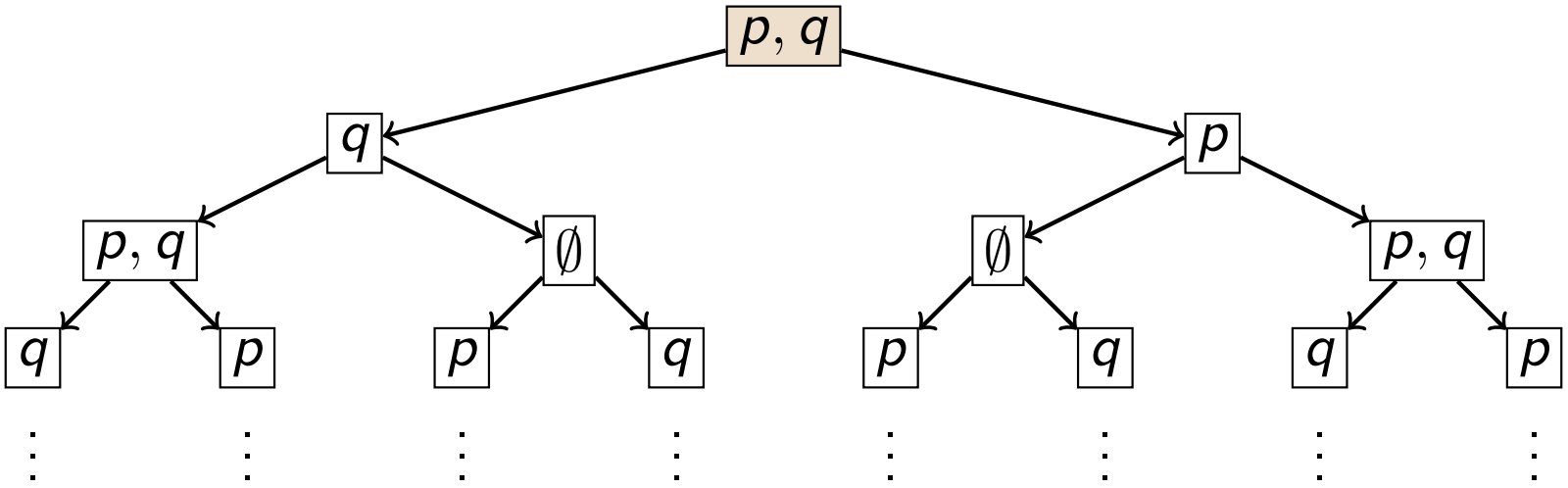


Справедливы следующие соотношения:

- в начале развития событий верно p,
  но события могут развиваться так, что p станет неверным
  $$\mathcal{I}, \square \models p, \qquad \mathcal{I}, \square \models \mathbf{EF}\neg p$$
- события могут развиваться так, чтобы p всегда оставалось верным,
  но могут развиваться и по-другому
  $$\mathcal{I}, \square \models \mathbf{EG}p, \qquad \mathcal{I}, \square \not\models \mathbf{AG}p$$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую CTL-интерпретацию $\mathcal{I}$
(при переходе влево изменяется значение p, вправо — значение q):



Справедливы следующие соотношения:

- как бы ни развивались события, обязательно есть способ в дальнейшем сделать p и q одновременно верными
$$\mathcal{I}, \square \models \mathbf{AGEF}(p \,\&\, q)$$
- утверждение «после возникновения события p рано или поздно обязательно возникает событие q» неверно
$$\mathcal{I}, \square \not\models \mathbf{AG}(p \to \mathbf{AF}q)$$