

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 18

Системы дизъюнктов

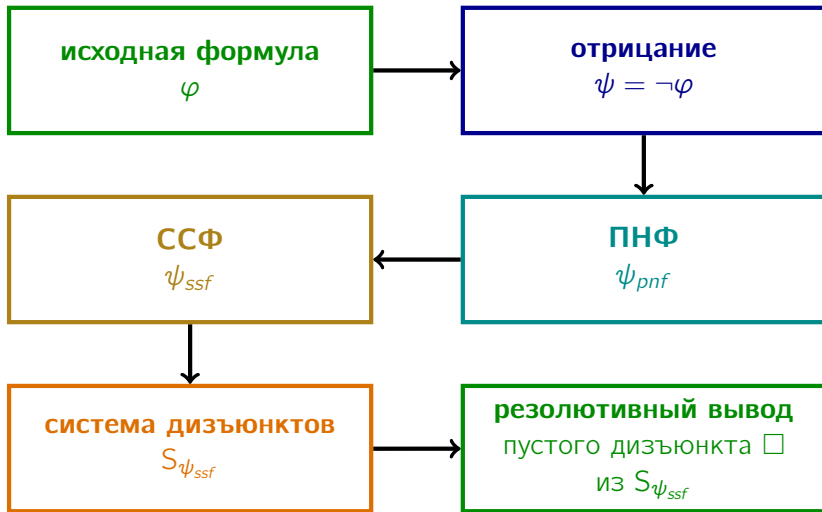
Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

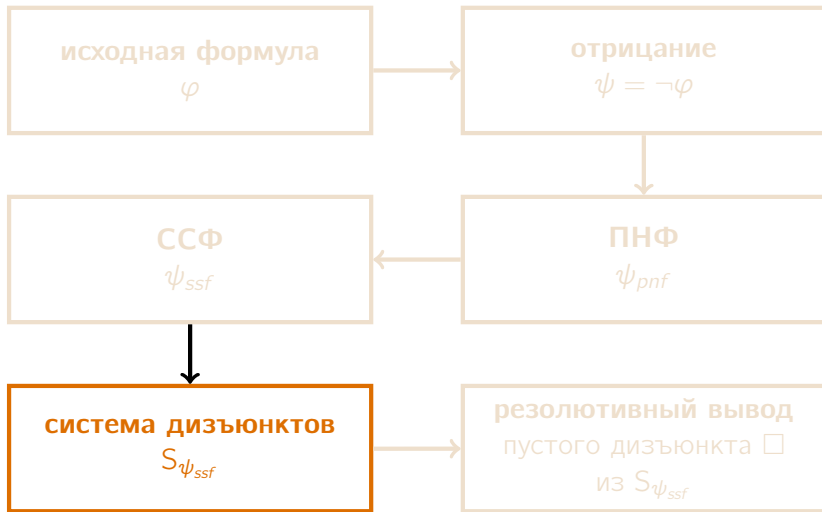
E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$

Системы дизъюнктов

Дизъюнктом называется ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \tilde{x}^n (L_1 \vee \dots \vee L_k),$$

где L_i — **литера** (атом или его отрицание)

Для краткости иногда будем опускать
кванторную приставку дизъюнктов:

$$\forall \tilde{x}^n (L_1 \vee \dots \vee L_k) = L_1 \vee \dots \vee L_k$$

Для упрощения технических выкладок будем отождествлять между собой дизъюнкты, получающиеся друг из друга перестановкой слагаемых

В связи с таким упрощением будем
отождествлять дизъюнкт с **мультимножеством** его литер:

$$L_1 \vee \dots \vee L_k = \{L_1, \dots, L_k\}$$

Системы дизъюнктов

Например:

(но это **только** при обсуждении дизъюнктов)

$$\forall x (P(x) \vee P(x) \vee Q(f(c)))$$

=

$$P(x) \vee P(x) \vee Q(f(c))$$

=

$$\{P(x), P(x), Q(f(c))\}$$

=

$$P(x) \vee Q(f(c)) \vee P(x)$$

=

$$\forall x (P(x) \vee Q(f(c)) \vee P(x))$$

Пустой дизъюнкт $\square$ — это особый дизъюнкт, представляющий собой пустое множество литер

Пустой дизъюнкт будем считать **невыполнимым**:

$$L_1 \vee \dots \vee L_k \llsim L_1 \vee \dots \vee L_k \vee f, \text{ а значит, } \square \llsim f$$

Системой дизъюнктов будем называть (любое) множество дизъюнктов

Системы дизъюнктов

Утверждение. $\forall x (\varphi \& \psi) \sim \forall x \varphi \& \forall x \psi$

Доказательство. Очевидно?

(Обосновать эту равносильность настолько же просто,
как и все *основные равносильности*)

Теорема (о переходе к дизъюнктам)

Для ССФ с любым набором множителей $D_1, \dots, D_k$ верно:

$$\models \forall \widetilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k) \quad \Leftrightarrow \quad \models \{\forall \widetilde{x}^n D_1, \dots, \forall \widetilde{x}^n D_k\}$$

Доказательство

По *утверждению выше*, $\forall \widetilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k) \sim \forall \widetilde{x}^n D_1 \& \dots \& \forall \widetilde{x}^n D_k$

Следовательно, с учётом *семантики $\&$* ,

$$\models \forall \widetilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k)$$

$$\Leftrightarrow \models \forall \widetilde{x}^n D_1 \& \dots \& \forall \widetilde{x}^n D_k$$

$$\Leftrightarrow \models \{\forall \widetilde{x}^n D_1, \dots, \forall \widetilde{x}^n D_k\} \quad \blacktriangledown$$

Системы дизъюнктов

Пример:

$$\models \forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(f(x)) \vee R(x, g(x))) \& \neg R(x, u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\models \{P(x), \quad \neg P(f(x)) \vee R(x, g(x)), \quad \neg R(x, u)\}$$