Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 17

Основные допущения в задаче маршрутизации
Маршрутизация и свойства графов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Основные допущения

Далее будем полагать, что веса путей в графе устроены следующим образом

Веса являются действительными числами ($\mathbb{R}$) или (чтобы соблюсти «алгоритмичность») числами более частного вида — например, рациональными ($\mathbb{Q}$) или целыми ($\mathbb{Z}$)

Каждому ребру e графа топологии присвоен фиксированный вес $\omega(e)$ (в т.ч. не изменяющийся со временем), то есть

- для графа топологии $G = (V, E)$ задана весовая функция $\omega : E \to \mathbb{R}$ и
- задача маршрутизации рассматривается для взвешенного графа (G, ω)

Вес $C(P)$ пути P во взвешенном графе — это сумма весов рёбер этого пути

Свойства графов

Путь во взвешенном графе из заданной вершины s в заданную вершину d будем называть оптимальным, если не существует путей из s в d меньшего веса

Лемма (о простых путях). **Если во взвешенном графе Γ нет циклов отрицательного веса и из вершины s достижима вершина t, то в Γ существует оптимальный простой путь из s в t**

Лемма (о подпутях). **Для любого оптимального пути $v_1 - \cdots - v_n$ во взвешенном графе без циклов отрицательного веса любой подпуть $v_i - \cdots - v_j$ этого пути, $1 \leq i \leq j \leq n$, также оптимален**

Д.з. 1:

1. Докажите эти леммы
2. Верно ли, что в основных допущениях **каждый** оптимальный путь является простым?
3. Насколько существенно в этих леммах требование отсутствия циклов отрицательной стоимости?

Свойства графов

Дерево оптимальных путей в вершину d во взвешенном графе — это остовное дерево T этого графа с корнем d, в котором любой простой путь, ведущий в d, оптимален

Теорема (о дереве оптимальных путей). В любом связном взвешенном графе $\Gamma = (G, \omega)$ без циклов отрицательного веса для любой его вершины d существует дерево оптимальных путей в эту вершину

Доказательство. Пронумеруем вершины графа $G = (V, E)$:
$V = \{s_1, \ldots, s_n\}$

Построим последовательность деревьев
$T_0 = (V_0, E_0)$, $T_1 = (V_1, E_1), \ldots, T_n = (V_n, E_n)$ следующего вида:

1. Каждое дерево T_i является подграфом G и подграфом T_{i+1}
2. В каждом дереве T_i содержится соответствующая вершина s_i, если считать, что $s_0 = d$
3. Каждый простой путь в d в каждом дереве T_i является оптимальным в Γ

Очевидно, что если получится построить такую последовательность, то T_n — искомое дерево

Свойства графов

Доказательство.

$T_0 = (\{d\}, \emptyset)$ — очевидно, что это дерево подходит в качестве T_0

Для уже построенного дерева $T_{i-1} = (V_{i-1}, E_{i-1})$, $1 \le i \le n$, зададим $T_i = (V_i, E_i)$ так

Если $s_i \in V_{i-1}$, то $T_i = T_{i-1}$

Иначе $s_i \notin V_{i-1}$, и тогда устроим дерево T_i следующим образом

По лемме о простых путях, существует оптимальный простой путь из $s_i = v_1$ в $d = v_k$:

$$v_1 - v_2 - \dots - v_k$$

Пусть m — наименьший номер из $\{1, \dots, k\}$, такой что $v_m \in V_{i-1}$ ($m > 1$, т.к. $v_1 = s_i \notin V_{i-1}$)

Примем $V_i = V_{i-1} \cup \{v_1, \dots, v_{m-1}\}$ и $E_i = E_{i-1} \cup \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{m-1}, v_m)\}$

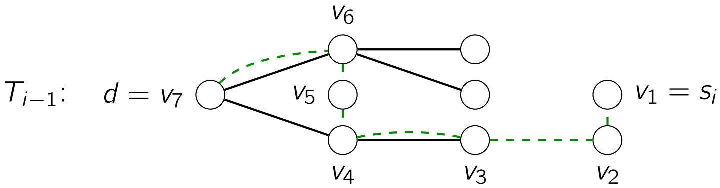
Свойства графов

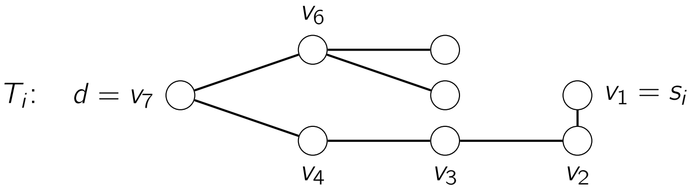
Доказательство.

$s_i = v_1 - v_2 - \cdots - v_k = d$ — оптимальный путь в G; $\quad m = \min(\ell \mid v_\ell \in V_{i-1})$;

$V_i = V_{i-1} \cup \{v_1, \ldots, v_{m-1}\}$; $\quad E_i = E_{i-1} \cup \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{m-1}, v_m)\}$

Иллюстрация:





Свойства графов

Доказательство.

$$s_i = v_1 - v_2 - \cdots - v_k = d \text{ — оптимальный путь в } G; \quad m = \min(\ell \mid v_\ell \in V_{i-1});$$
$$V_i = V_{i-1} \cup \{v_1, \ldots, v_{m-1}\}; \quad E_i = E_{i-1} \cup \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{m-1}, v_m)\}$$

По построению, T_{i-1} — подграф T_i и T_i — подграф G

T_i — дерево, так как этот граф связен и

$|E_i| = |E_{i-1}| + (m-1) = |V_{i-1}| - 1 + (m-1) = |V_i| - 1$

Осталось показать, что все простые пути в d в T_i оптимальны

Предположим от противного, что это не так: в одном из деревьев T_i существует неоптимальный путь P вида $w_1 - w_2 - \cdots - w_k = d$

Рассмотрим наименьший такой номер i ($i > 0$, т.к. все простые пути в T_0 оптимальны)

Тогда P не содержится в T_{i-1}

Значит, P начинается в вершине $v_\ell \in \{v_1, \ldots, v_{m-1}\}$: $P = v_\ell - \cdots - v_k$

Подпуть $v_m - \cdots - v_k$ пути P (содержится в T_i и) оптимален, а значит, по лемме о подпутях путь $v_\ell - \cdots - v_m$ неоптимален

Но тогда по лемме о подпутях неоптимален и путь $v_1 - \cdots - v_\ell - \cdots - v_m - \cdots - v_k$ (*противоречие*) ▼

Маршрутизация и деревья оптимальных путей

Пусть в узле s вычислено какое-либо дерево T_d оптимальных путей в узел d в Γ

Тогда записью $table_s[d]$ обозначим родителя вершины s в T_d (для определённости можно считать, что $table_s[s] = s$)

Отображение $table_s$ можно считать таблицей маршрутизации узла s, и процедуру продвижения пакета с адресатом d в узле s можно устроить так:

- Если $s = d$, то продвижение завершено, пакет доставлен
- Иначе отправить пакет узлу $table_s[d]$

Но в разных узлах могут быть сохранены разные деревья T_d:
не случится ли так, что из-за этого пакет будет бесконечно передаваться по сети и не дойдёт до адресата?

Маршрутизация и деревья оптимальных путей

Последовательность узлов сети $v_1, \dots, v_k$ назовём

- путём доставки из узла s адресату d, если верно следующее:
  - $v_1 = s$, $v_k = d$
  - $\forall i \in \{1, \dots, k-1\} : table_{v_i}[d] = v_{i+1}$
- циклом для адресата d, если верно следующее:
  - все узлы v_i отличны от d
  - $\forall i \in \{1, \dots, k-1\} : table_{v_i}[d] = v_{i+1}$
  - $table_{v_n}[d] = v_1$

Будем говорить, что таблицы маршрутизации узлов сети

- гарантируют доставку пакета адресату d, если для любого узла s существуют путь доставки из s адресату d
- содержат цикл, если существует цикл для адресата d

Лемма (об ациклических таблицах). **Если каждая вершина графа топологии сети инцидентна хотя бы одному ребру, то таблицы маршрутизации узлов сети гарантируют доставку пакета адресату $\Leftrightarrow$ в этих таблицах нет циклов ни для одного адресата**

Маршрутизация и деревья оптимальных путей

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть в таблицах маршрутизации содержится цикл $v_1, \dots, v_k$ для адресата d

Тогда $\forall i \in \{1, \dots, k\} : table_{v_i}[d] \in \{v_1, \dots, v_k\}$

При этом $d \notin \{v_1, \dots, v_k\}$

Значит, пакет, поступивший в узел v_1, не будет доставлен адресату d

($\Leftarrow$) Пусть таблицы маршрутизации не гарантируют доставку пакета адресату d

Тогда существует узел s, из которого не существует пути доставки адресату d

Следовательно, среди значений $v_1 = s, v_2 = table_{v_1}[d], v_3 = table_{v_2}[d], \dots$ не встречается d

Так как в сети содержится конечное число узлов, то среди значений $v_1, v_2, v_3, \dots$ есть по крайней мере два одинаковых: $v_i = v_j$, где $i < j$

Тогда $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ — цикл для d ▼

Маршрутизация и деревья оптимальных путей

Д.з. 2.

Допустим, что

- топология сети может произвольно изменяться во время выполнения сети,
- в начале выполнения и после каждого изменения сохраняются связность графа топологии и основные допущения и
- между изменением топологии и следующим за ним продвижением пакета узлом обязательно выполняется вычисление таблиц в этом узле

Докажите, что в таких условиях никакой распределённый алгоритм с асинхронным обменом сообщениями не способен гарантировать доставку пакетов всем адресатам