Математическая логика и логическое программирование

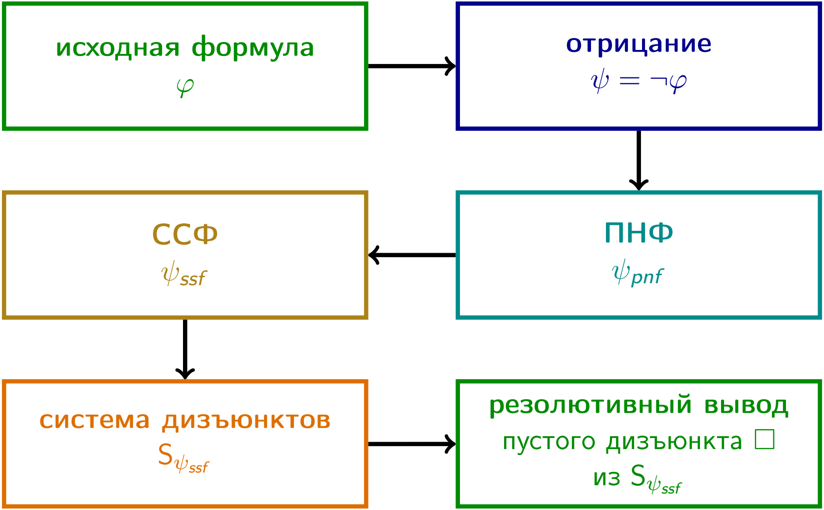
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 18

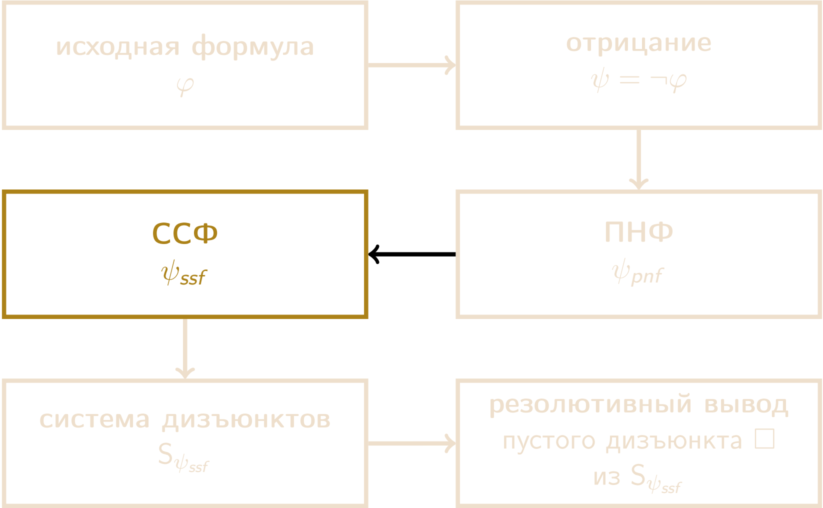
Сколемовская стандартная форма (ССФ)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf}$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf}$$

Сколемовская стандартная форма

Замкнутая формула логики предикатов находится в сколемовской стандартной форме (ССФ), если

- она находится в предварённой нормальной форме и
- её кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$:

$$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ (D_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} D_k)$$

Например, формула

$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \mathbin{\&} (\neg \mathrm{P}(\mathsf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{g}(\mathrm{x}))) \mathbin{\&} \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u}))$$

находится в сколемовской стандартной форме

Наряду с «находится в ССФ» будем говорить «является ССФ»

На одном из этапов метода резолюций следует преобразовать ПНФ в настолько же (не)выполнимую ССФ

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x_{n+1}}\ \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ. Тогда

$$|\!\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (\chi\{\mathtt{x_{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Небольшая вольность: если слева от $\exists$ не стоит ни одного $\forall$, то, согласно лемме, f — 0-местный функциональный символ: так будем называть **константы**, и писать «$\mathsf{f}()$» наряду с «f»

Доказательство ($\Leftarrow$)

Рассмотрим произвольную модель $\mathcal{I}$ для формулы $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (\chi\{\mathtt{x_{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$

По семантике «$\forall$», для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно

$$\mathcal{I} \models \chi\{\mathtt{x_{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}[\widetilde{d}^n]$$

Следовательно, верно и $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, \bar{\mathsf{f}}(\widetilde{d}^n)]$

По семантике «$\exists$», верно $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x_{n+1}}\ \chi)[\widetilde{d}^n]$

По семантике «$\forall$», так как набор предметов $\widetilde{d}^n$ произволен, верно и $\mathcal{I} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x_{n+1}}\ \chi$

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\, \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ. Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Доказательство ($\Rightarrow$)

Рассмотрим произвольную модель $\mathcal{I}$ для формулы φ

По семантике «$\forall$» и «$\exists$», для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ существует предмет d_{n+1}, такой что $\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n, d_{n+1}]$

По $\mathcal{I}$ построим **новую** интерпретацию $\mathcal{J}$:

- если в сигнатуре был функциональный символ f, удалим его
- добавим в сигнатуру функциональный символ $\mathsf{f}^{(n)}$
- оценим f так, чтобы выполнялось равенство $\bar{\mathsf{f}}(\widetilde{d}^n) = d_{n+1}$

Тогда $\mathcal{J} \models \chi[\widetilde{d}^n, \bar{\mathsf{f}}(\widetilde{d}^n)]$, а значит, и $\mathcal{J} \models \chi\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}[\widetilde{d}^n]$

По семантике «$\forall$», так как набор предметов $\widetilde{d}^n$ произволен, верно и $\mathcal{J} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, (\chi\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$ ▼

Лемма об удалении квантора существования

Пусть $\varphi = \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \exists \mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}\ \chi$ — замкнутая формула ЛП ($n \geq 0$) и функциональный символ f не содержится в χ. Тогда

$$|\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad |\models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ (\chi\{\mathtt{x}_{\mathtt{n+1}}/\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\})$$

Устранение квантора $\exists$ с введением новых символов с целью получить более простую «хорошую» формулу обычно называют сколемизацией (*здесь «хорошая» — сохраняющая выполнимость и невыполнимость*)

При устранении $\exists$ на место удаляемой переменной подставляются сколемовские термы (*здесь* — $\mathsf{f}(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$)

Алгоритм сколемизации ПНФ

Дано: ПНФ φ_{pnf}
Требуется получить ССФ $Sk(\varphi_{pnf})$, такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

Алгоритм. Пока в кванторной приставке есть хотя бы один квантор $\exists$, самый левый $\exists$ удаляется при помощи подстановки сколемовского терма:

$$\varphi_{pnf} = \forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{\mathtt{k}-1} \ \exists \mathtt{x}_\mathtt{k} \ \forall \mathtt{x}_{\mathtt{k}+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{\mathtt{m}-1} \ \exists \mathtt{x}_\mathtt{m} \ \ldots \ \chi$$

$$\forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{\mathtt{k}-1} \ \forall \mathtt{x}_{\mathtt{k}+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{\mathtt{m}-1} \ \exists \mathtt{x}_\mathtt{m} \ \ldots \ (\chi\{\mathtt{x}_\mathtt{k}/\mathtt{f}_1(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{\mathtt{k}-1})\})$$

$$\forall \mathtt{x}_1 \ \ldots \forall \mathtt{x}_{\mathtt{k}-1} \ \forall \mathtt{x}_{\mathtt{k}+1} \ \ldots \forall \mathtt{x}_{\mathtt{m}-1} \ \ldots$$
$$(\chi\{\mathtt{x}_\mathtt{k}/\mathtt{f}_1(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{\mathtt{k}-1}), \mathtt{x}_\mathtt{m}/\mathtt{f}_2(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{\mathtt{k}-1}, \mathtt{x}_{\mathtt{k}+1}, \ldots, \mathtt{x}_{\mathtt{m}-1})\})$$

$$\ldots$$

$$Sk(\varphi_{pnf})$$

При этом **важно** (!) при удалении очередного $\exists$
каждый раз выбирать **новый** функциональный символ:
не содержащийся в формуле после всех предыдущих удалений

Алгоритм сколемизации ПНФ

Пример:

$$\exists u\, \exists v\, \forall w\, \exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(u,v) \,\&\, P(v,w) \,\&\, P(w,x) \,\&\, P(x,y) \,\&\, P(y,z) \,\&\, P(z,u))$$

$$\exists v\, \forall w\, \exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(c,v) \,\&\, P(v,w) \,\&\, P(w,x) \,\&\, P(x,y) \,\&\, P(y,z) \,\&\, P(z,c))$$

$$\forall w\, \exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(c,d) \,\&\, P(d,w) \,\&\, P(w,x) \,\&\, P(x,y) \,\&\, P(y,z) \,\&\, P(z,c))$$

$$\forall w\, \forall y\, \exists z\, (P(c,d) \,\&\, P(d,w) \,\&\, P(w,f(w)) \,\&\, P(f(w),y) \,\&\, P(y,z) \,\&\, P(z,c))$$

$$\forall w\, \forall y\, (\quad P(c,d) \,\&\, P(d,w) \,\&\, P(w,f(w)) \,\&\, P(f(w),y) \,\&\, P(y,g(w,y)) \,\&\, P(g(w,y),c) \quad)$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- c — любая константа (ни одной не содержится в формуле)
- d — любая константа, <u>кроме c</u>
- f — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- g — любой функциональный символ местности 2 (ни один не содержится в формуле)

Алгоритм сколемизации ПНФ

Другой пример:

$$\forall x\, \exists z\, \exists y\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\forall x\, \exists y\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(\mathsf{f}(x)) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\forall x\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(\mathsf{f}(x)) \vee R(x,\mathsf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- f — любой функциональный символ местности 1
(ни один не содержится в формуле)
- g — любой функциональный символ местности 1, <u>кроме f</u>

Алгоритм сколемизации ПНФ

Теорема (о сколемизации)

Если φ_{pnf} — ПНФ,
то $Sk(\varphi_{pnf})$ — ССФ, для которой верно следующее:

$$|\!\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models Sk(\varphi_{pnf})$$

Доказательство.

Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ — формулы, последовательно получающиеся удалением кванторов $\exists$ (по одному) согласно алгоритму сколемизации ($\psi_1 = \varphi_{pnf}$, $\psi_k = Sk(\varphi_{pnf})$)

По лемме об удалении квантора $\exists$, справедливы равносильности

$$|\!\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models \psi_2 \quad \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \quad |\!\models Sk(\varphi_{pnf}) \ \blacktriangledown$$

Вопрос «на засыпку»:

А если в формулировке теоремы заменить «выполнима» ($|\!\models$) на «общезначима» ($\models$), останется ли она справедливой?