

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 13

Теорема Лёвенгейма-Сколема  
Теорема компактности Мальцева  
Автоматизация доказательства теорем

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

# Вступление

**Корректность** и **полнота** метода семантических таблиц в ЛП:  
 $\models \varphi \Leftrightarrow$  для таблицы  $\langle \mid \varphi \rangle$  существует успешный табличный вывод

**Полнота** метода семантических таблиц в ЛП (доказательство):  
если  $\models \varphi$ , то успешный табличный вывод можно построить, придерживаясь особой стратегии

---

Свойства и «приёмы», обсуждавшиеся для метода семантических таблиц, позволяют

- ▶ обосновать несколько нетривиальных утверждений, не имеющих прямого отношения к методу, и
- ▶ естественно поставить важные алгоритмические вопросы, касающиеся проблемы общезначимости формул логики предикатов

# Теорема Лёвенгейма-Сколема

Вспомним **определение выполнимости формул логики предикатов**:  
Формула выполнима  $\Leftrightarrow$  она выполняется хотя бы в одной интерпретации

Представим себе, что для проверки выполнимости формулы разрешено перебрать **сколько угодно** интерпретаций и в каждой проверить выполнимость формулы

Следует ли перебрать все существующие в природе интерпретации, или же достаточно ограничиться только какими-нибудь «простыми»?

В таком переборе намного важнее природы предметов оказывается их **количество** (как было отмечено, например, в **блоке 7**)

Хотелось бы в полноценных рассуждениях о выполнимости формулы использовать только интерпретации с хотя и бесконечной, но всё же как можно меньшей предметной областью

# Теорема Лёвенгейма-Сколема

Для любого предложения  $\varphi$  справедлива равносильность:

$\varphi$  выполнимо  $\Leftrightarrow \varphi$  имеет модель с не более чем счётной предметной областью

Доказательство.

Совместим знания о **корректности** и **полноте** вывода и **определение выполнимости** таблицы:

$\models \varphi \Leftrightarrow$  для  $T_0 = \langle \varphi \mid \rangle$  не существует успешного табличного вывода

Построив вывод согласно **стратегии**

из доказательства **теоремы о полноте**, получим

- ▶ бесконечную ветвь  $T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \dots$  вывода, состоящую только из незакрытых таблиц
- ▶ интерпретацию  $\mathcal{I}$  с **не более чем счётной** предметной областью, в которой выполняются все таблицы этой ветви — в том числе и таблица  $T_0$  ▼

# Теорема компактности Мальцева

Вспомним **теорему о логическом следствии**:

методы проверки общезначимости формул можно применить и для проверки логического следования одних формул из других

$$\psi_1, \dots, \psi_k \models \varphi \Leftrightarrow \models \psi_1 \& \dots \& \psi_k \rightarrow \varphi$$

Здесь  $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$  — это **конечная** база знаний, относительно которой требуется проверить достоверность извлечённого следствия

А можно ли предложить что-нибудь аналогичное для **бесконечных** баз знаний?

Оказывается, что, независимо от размера набора знаний, в достоверности логического следствия можно убедиться, выбрав для рассмотрения только некоторый **конечный** поднабор

## Теорема компактности Мальцева

Для любого предложения  $\varphi$  и любого множества предложений  $\Gamma$  справедлива равносильность:

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$  существует конечное подмножество  $\Gamma'$  множества  $\Gamma$ , такое что  $\Gamma' \models \varphi$

Доказательство.

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$  таблица  $T = \langle \Gamma \mid \varphi \rangle$  невыполнима (почему?)

$\Leftrightarrow$  существует успешный табличный вывод  $\mathfrak{D}$  для  $T$

Подмножество  $\Gamma_1$  всех формул множества  $\Gamma$ , к которым применяются правила вывода в  $\mathfrak{D}$ , конечно, как и минимальное подмножество  $\Gamma_2$ , такое что для каждого листа  $\mathfrak{D}$  существует формула из  $\Gamma_2$ , содержащаяся в обеих частях таблицы этого листа (почему?)

Тогда для таблицы  $\langle \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \mid \varphi \rangle$ , также существует успешный табличный вывод (почему?)

Значит,  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \varphi$  ▼

# Теорема компактности Мальцева

Множество предложений  $\Gamma$  называется **выполнимым** ( $\models \Gamma^1$ ), если у этого множества есть хотя бы одна модель

**Следствие.** Для любого множества предложений  $\Gamma$  верно:

$$\not\models \Gamma \\ \Leftrightarrow$$

существует конечное подмножество  $\Gamma'$  множества  $\Gamma$ , такое что  $\not\models \Gamma'$

**Доказательство.**

$$\not\models \Gamma$$

$\Leftrightarrow$  (определения **логического следования** и  **невыполнимости**)

$\Gamma \models \varphi$  для произвольно взятого невыполнимого предложения  $\varphi$

$\Leftrightarrow$  (**теорема компактности Мальцева**)

существует подмножество  $\Gamma'$  множества  $\Gamma$ , такое что  $\Gamma' \models \varphi$

(для произвольно взятого невыполнимого предложения  $\varphi$ )

$\Leftrightarrow$  (определения **логического следования** и  **невыполнимости**)

существует подмножество  $\Gamma'$  множества  $\Gamma$ , такое что  $\not\models \Gamma' \blacktriangledown$

---

<sup>1</sup> Снова то же необщепотребимое обозначение

# Автоматизация доказательства теорем

В свете того, что есть стратегия построения успешного табличного вывода для произвольной невыполнимой таблицы, естественно возникает вопрос:

А можно ли поручить проверку общезначимости формул ЛП компьютеру, чтобы он делал всю работу за нас?

Если формула общезначима, то это можно обосновать, придерживаясь упомянутой стратегии

А если не общезначима ... (?)

... то на этот счёт пока есть только теорема о корректности: **успешного вывода для соответствующей таблицы не существует**

Познакомившись получше с логикой предикатов и логическими программами, обсудим и то, что целиком переложить такую работу на компьютер **невозможно**<sup>1</sup>

Но если всё же попытаться, то ...

---

<sup>1</sup> То есть о том, что проблема общезначимости формул алгоритмически неразрешима



# Автоматизация доказательства теорем

Если программно реализовать стратегию построения логического вывода<sup>1</sup>, то в результате получится **прувер**: средство доказательства теорем логики предикатов

## First-order theorem prover

К пруверу разумно было бы предъявить такие требования:

- ▶ **корректность**: выдаются только правильные ответы — обязательно
- ▶ **полнота**: ответы выдаются всегда — желательно как можно лучше к этому приблизиться
- ▶ **эффективность**: ответы выдаются за разумное время — очень желательно

---

<sup>1</sup> Не обязательно стратегию из доказательства теоремы полноты. Не обязательно полную стратегию. Не обязательно табличного вывода

# Автоматизация доказательства теорем

Если программно реализовать стратегию построения логического вывода<sup>1</sup>, то в результате получится **прувер**: средство доказательства теорем логики предикатов

## First-order theorem prover

Один из **очень многих** примеров того, чего позволило добиться использование пруверов:<sup>2</sup> **строго доказана** корректность \*nix-микроядра L4, и в процессе доказательства найдены и исправлены сотни ошибок в коде

---

1 Не обязательно стратегию из доказательства теоремы полноты.

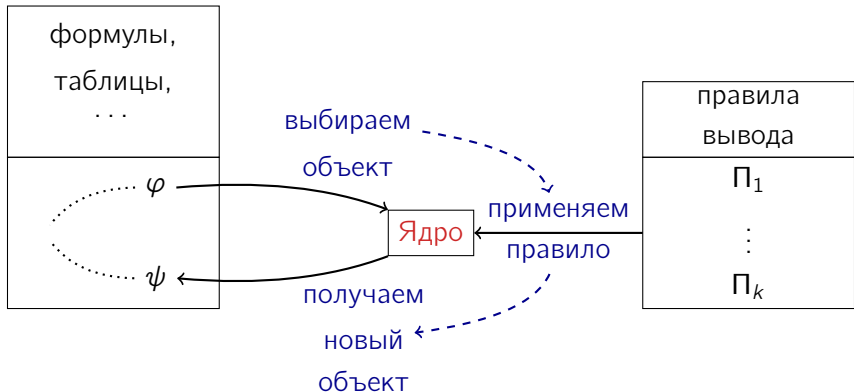
Не обязательно полную стратегию. Не обязательно табличного вывода

2 Klein et al. seL4: formal verification of an OS kernel. 2009.

Конкретно этот пример выбран только из-за наглядности, понятности и при этом «неоспоримой полезности» формулировки результата

# Автоматизация доказательства теорем

Как устроены пружеры:



# Автоматизация доказательства теорем

Представим себе прuver, способный проверять общезначимость формул логики предикатов **методом семантических таблиц**:

- ▶ корректный
- ▶ выдающий ответ «да» для **всех** общезначимых формул

Насколько эффективен может быть такой прuver?

Эффективность построения вывода определяется тем,

- ▶ как на каждом шаге выбираются формулы для применения к ним правил и
- ▶ какие термы подставляются при применении правил  $L\forall$  и  $R\exists$

Если прuverом осуществляется полный перебор всех формул, возникающих в таблицах, или перебор слишком большого числа термов, то такой прuver, вероятно, окажется неэффективным

# Автоматизация доказательства теорем

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

База знаний

В огороде бузина

Растёт(бузина, огород)

Запрос

В Киеве дядька

$\exists u$  (Дядька( $u$ ))

& Живёт( $u$ , Киев))

# Автоматизация доказательства теорем

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

## База знаний

В огороде бузина

Растёт(**бузина**, **огород**)

Всё в огороде посадил дядька

$\forall x$  (Растёт(**x**, **огород**)  $\rightarrow$

$\exists y$  (Посадил(**y**, **x**) & Дядька(**y**)))

## Запрос

В Киеве дядька

$\exists y$  (Дядька(**y**)

& Живёт(**y**, **Киев**))

# Автоматизация доказательства теорем

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

## База знаний

В огороде бузина

$\text{Растёт}(\text{бузина}, \text{огород})$

Всё в огороде посадил дядька

$\forall x (\text{Растёт}(x, \text{огород}) \rightarrow$   
 $\exists y (\text{Посадил}(y, x) \& \text{Дядька}(y)))$

Бузину сажают только Киевляне

$\forall x (\text{Посадил}(x, \text{бузина})$   
 $\rightarrow \text{Живёт}(x, \text{Киев}))$

## Запрос

В Киеве дядька

$\exists y (\text{Дядька}(y)$   
 $\& \text{Живёт}(y, \text{Киев}))$

# Автоматизация доказательства теорем

$$L\forall \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x) \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \mid \Delta \rangle}$$

$$R\exists \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \rangle}$$

## Избежать перебора большого числа термов — непростая задача

Для примера представим себе, что при построении вывода придётся перебрать все термы, составленные из **одного** функционального символа  $f^{(2)}$ , используемого не более 10 раз, и **двух** различных констант (*вроде бы это не очень большие термы?*)

Можно легко посчитать, что существует **более**  $10^{300}$  различных термов такого вида

Число  $10^{100}$  (на 200 полей меньше) имеет особое название — **гугол**: это бессмысленно большое число, превосходящее число атомов в наблюдаемой вселенной



# Автоматизация доказательства теорем

$$L\forall \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x) \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \mid \Delta \rangle}$$

$$R\exists \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \rangle}$$

## Избежать перебора большого числа термов — непростая задача

Существуют способы повышения эффективности перебора термов при построении логического вывода для доказательства общезначимости формул<sup>1</sup>

Далее обсудим один из таких способов и основанный на нём метод:  
метод резолюций

Заодно в процессе обсуждения познакомимся и с другими важными понятиями и задачами и методами, касающимися логики предикатов, и подготовим основу для обсуждения логического программирования

---

<sup>1</sup> J.A. Robinson: метод резолюций. С.Ю. Маслов: обратный вывод