

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 2

Логика высказываний:  
синтаксис, семантика

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- ▶ «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** посмотрим внимательно на такое предложение:

**Если будете прогуливать лекции,**

**то ничего хорошего из этого не выйдет**

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- ▶ «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** посмотрим внимательно на такое предложение:

**Если будете прогуливать лекции,**

**то ничего хорошего из этого не выйдет**

A

Можно ли сказать, что это «простое высказывание»?

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- ▶ «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** посмотрим внимательно на такое предложение:

**Если** будете прогуливать лекции,

**то** ничего хорошего из этого не выйдет

→

Здесь есть **причинно-следственная связь** ...

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- ▶ «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** посмотрим внимательно на такое предложение:

**Если** будете прогуливать лекции,

**то** ничего хорошего из этого не выйдет

$A \rightarrow B$

... между двумя простыми высказываниями

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- ▶ «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** посмотрим внимательно на такое предложение:

**Если** будете прогуливать лекции,

**то** ничего хорошего из этого **не** выйдет

$$A \rightarrow \neg B$$

А одно из высказываний можно сделать **ещё** проще

# Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ «простых» высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- ▶ «булевых» причинно-следственных связей между этими высказываниями

**Для примера** посмотрим внимательно на такое предложение:

**Если** будете прогуливать лекции,

**то** **ничего** **хорошего** **из этого** **не** **выйдет**

$$A \rightarrow \neg B$$

# Логика высказываний: вступление

После формализации высказывания получилось что-то очень похожее на **формулу булевой алгебры**, но не совсем:

Какой смысл имеет построенное высказывание?

**Булева алгебра**: значение формулы — это булева функция:

A	B	$A \rightarrow \neg B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**Логика высказываний**: ?

Основные три составляющие формального языка, которые дальше будут введены и для языка логики высказываний:

**алфавит**: набор символов, используемых в языке

**синтаксис**: правила, по которым из символов строятся высказывания языка (**формулы**)

**семантика**: значение этих высказываний



# Логика высказываний: алфавит

Алфавит логики высказываний состоит из следующих символов:

## 1. Пропозициональные переменные

- ▶ Будем считать, что в алфавите содержится **счётное** число таких переменных
- ▶ **Var** — множество всех пропозициональных переменных

## 2. Логические связи:

Конъюнкция	(логическое И):	<b>&amp;</b>
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ):	<b>∨</b>
Отрицание	(логическое НЕ):	<b>¬</b>
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО):	<b>→</b>

## 3. Скобки:

**( )**

# Синтаксис и БНФ

## Синтаксис:

- ▶ *σύνταξις* (древнегреческий) — строй, организация, конструкция<sup>1</sup>
- ▶ система языковых категорий, относящихся к соединениям слов и строению предложений<sup>2</sup>

Для задания синтаксиса в курсе будут использоваться  
формы Бэкуса-Наура (БНФ):

*что-то* ::= *запись1* | *запись2* | ... | *записьN*

Прочтение такой БНФ:

- ▶ *Запись1* — это *что-то*
- ▶ *Запись2* — это *что-то*
- ...
- ▶ *ЗаписьN* — это *что-то*
- ▶ Других способов записи *чего-то* нет

---

<sup>1</sup> Дворецкий. Древнегреческо-русский словарь

<sup>2</sup> Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

# Логика высказываний: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики высказываний:

$$\varphi ::= x \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi),$$

где  $\varphi$  — формула и  $x \in \text{Var}$

Формула вида  $x$ ,  $x \in \text{Var}$ , называется атомарной (атомом),  
а остальные формулы  $((\varphi \& \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg \varphi))$  — составными

$\varphi = \psi$  — так в курсе будет обозначаться

посимвольное (синтаксическое) совпадение формул  $\varphi$  и  $\psi$

**Приоритет связок** по убыванию:  $\neg$ , затем  $\&$ , затем  $\vee$ , затем  $\rightarrow$

Скобки в записи формул можно опускать согласно приоритету связок,  
а также согласно ассоциативности связок  $\&$  и  $\vee$ :

$$A \& \neg B \& C \rightarrow D \vee E = ((A \& ((\neg B) \& C)) \rightarrow (D \vee E))$$

# Логика высказываний: семантика

## Семантика:

- ▶ *σημαντικός* (древнегреческий) — обозначающий, значимый<sup>1</sup>
- ▶ значение, смысл языковой единицы<sup>2</sup>

Основные логические значения, на которых основана семантика формул:

$\mathbb{t}$  — истина;

$\mathbb{f}$  — ложь

Значение формулы однозначно определяется значениями её атомов

Значение  $\mathcal{I}(x)$  атома  $x$  задаётся интерпретацией  $\mathcal{I} : \text{Var} \rightarrow \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$

Значение  $\mathcal{I}(\varphi)$  составной формулы  $\varphi$  в интерпретации  $\mathcal{I}$  задаётся так:

$$\mathcal{I}(\varphi \ \& \ \psi) = \mathbb{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} \text{ и } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t}$$

$$\mathcal{I}(\varphi \vee \psi) = \mathbb{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t}$$

$$\mathcal{I}(\varphi \rightarrow \psi) = \mathbb{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f} \text{ или } \mathcal{I}(\psi) = \mathbb{t}$$

$$\mathcal{I}(\neg \varphi) = \mathbb{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f}$$

В логике принято использовать немного другие обозначения:

$$\mathcal{I} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{t} \quad (\text{формула } \varphi \text{ выполняется в } \mathcal{I})$$

$$\mathcal{I} \not\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathbb{f} \quad (\text{формула } \varphi \text{ не выполняется в } \mathcal{I})$$

---

1 Дворецкий. Древнегреческо-русский словарь

2 Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

# Логика высказываний: семантика

## Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\}$$

$$\varphi = A \rightarrow \neg B$$

$$\mathcal{I}(A) = \text{f}, \mathcal{I}(B) = \text{t}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \not\models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \text{t})$$

$$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \text{f})$$

## Содержательное пояснение

Пусть  $A$  — высказывание «Я прогуливаю лекции»

$B$  — высказывание «Из этого выйдет что-то хорошее»

Тогда  $\mathcal{I}$  — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(A) = \text{f}$ : я прилежно хожу на лекции

$\mathcal{I}(B) = \text{t}$ : из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B$ : тот, кто сказал

«Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего», **прав**

# Логика высказываний: семантика

## Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\}$$

$$\varphi = A \rightarrow \neg B$$

$$\mathcal{I}(A) = \text{f}, \mathcal{I}(B) = \text{f}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \text{f})$$

$$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \text{f})$$

## Содержательное пояснение

Пусть  $A$  — высказывание «Я прогуливаю лекции»

$B$  — высказывание «Из этого выйдет что-то хорошее»

Тогда  $\mathcal{I}$  — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(A) = \text{f}$ : я прилежно хожу на лекции

$\mathcal{I}(B) = \text{f}$ : из этого не выйдет ничего хорошего

$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B$ : тот, кто сказал

«Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего», **прав**

# Логика высказываний: семантика

## Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\}$$

$$\varphi = A \rightarrow \neg B$$

$$\mathcal{I}(A) = \text{т}, \mathcal{I}(B) = \text{т}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \not\models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \text{т})$$

$$\mathcal{I} \not\models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \text{т} \text{ и } \mathcal{I}(\neg B) = \text{ф})$$

## Содержательное пояснение

Пусть  $A$  — высказывание «Я прогуливаю лекции»

$B$  — высказывание «Из этого выйдет что-то хорошее»

Тогда  $\mathcal{I}$  — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(A) = \text{т}$ : я прогуливаю лекции

$\mathcal{I}(B) = \text{т}$ : из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \not\models A \rightarrow \neg B$ : тот, кто сказал

«Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего», **неправ**