

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы

→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 53

Алгоритм проверки моделей
для логики ветвящегося времени

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

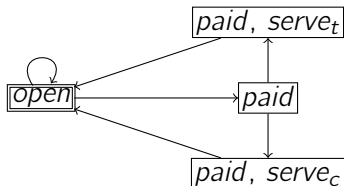
E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Напоминание

Модель Крипке M над множеством атомарных высказываний \mathcal{AP} :



Примеры формул CTL φ над тем же множеством \mathcal{AP} :

$open \ \& \ \neg paid \ \& \ \neg serve_t \ \& \ \neg serve_c$

$\neg \mathbf{EF}(\neg paid \ \& \ (serve_c \vee serve_t))$

$\mathbf{AG}(paid \rightarrow \mathbf{AF}(serve_c \vee serve_t))$

$\mathbf{EF}(paid \ \& \ \mathbf{EG} \neg serve_t)$

$\mathbf{AG}(\neg paid \rightarrow \mathbf{AX}(paid \rightarrow \mathbf{EF} serve_t))$

$M \models \varphi \Leftrightarrow$

формула φ выполняется в каждом начальном состоянии системы M

Алгоритм проверки моделей для CTL

Алгоритм проверки соотношения $M \models \varphi$ для МК M и формулы φ CTL будет излагаться «сверху вниз» от общей схемы (главной процедуры) к деталям реализации этой схемы (остальным процедурам)

По ходу изложения будет приводиться обоснование корректности (правильности) каждой процедуры

«Описание алгоритма

+ обоснование корректности

+ оценка сложности» —

типичное сочетание в «умном» изложении алгоритмов, позволяющее

- ▶ понять, как это реализовать,
- ▶ убедиться, что это действительно работает правильно, и
- ▶ оценить, достаточно ли эффективно решение для желаемых целей

Но оценку сложности приводить не будем, чтобы не перегружать рассказ излишними деталями

Алгоритм проверки моделей для CTL

$Sat(M, \psi)$ — так будем обозначать множество состояний МК M , в которых выполняется формула ψ : $Sat(M, \psi) = \{s \mid s \in S, M, s \models \psi\}$

Лемма. Для любых МК $M = (S, S_0, \mapsto, L)$ и формулы φ CTL верно:

$$M \models \varphi \iff S_0 \subseteq Sat(M, \varphi)$$

Доказательство. Напрямую следует из определений соотношения $M \models \varphi$ и множества $Sat(M, \varphi)$ ▼

Главная процедура

Дано: конечная МК M ; формула φ CTL

Результат: ответ на вопрос « $M \models \varphi$?»

Тело процедуры:

1. Вычислить множество $X = \Pi_{sat}(M, \varphi) = Sat(M, \varphi)$
2. Проверить соотношение $S_0 \subseteq X$
3. Вернуть результат проверки пункта 2

Алгоритм проверки моделей для CTL

Формулу φ CTL назовём **упрощённой**, если она задаётся БНФ

$$\varphi ::= \top \mid p \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\mathbf{EX} \varphi) \mid (\mathbf{EG} \varphi) \mid (\mathbf{E}(\varphi \mathbf{U} \varphi))$$

Формулы ψ_1 и ψ_2 CTL назовём **равносильными** ($\psi_1 \sim \psi_2$), если для любой МК M верно $Sat(M, \psi_1) = Sat(M, \psi_2)$

Процедура $\Pi_{sat}(M, \varphi)$

Дано: конечная МК M ; формула φ CTL

Результат: $Sat(M, \varphi)$

Тело процедуры:

1. Построить упрощённую формулу ψ , равносильную исходной:
$$\psi = Simplify(\varphi)$$
2. Вернуть множество $Sat(M, \psi)$ для упрощённой формулы:
$$\Pi_{sat}^s(M, \psi)$$

Алгоритм проверки моделей для CTL

Лемма (о равносильностях в CTL)

Для любых формул φ и ψ CTL

справедливы следующие равносильности:

- ▶ $\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$
- ▶ $\varphi \vee \psi \sim \neg(\neg\varphi \& \neg\psi)$
- ▶ $\mathbf{AX}\varphi \sim \neg\mathbf{EX}\neg\varphi$
- ▶ $\mathbf{AF}\varphi \sim \neg\mathbf{EG}\neg\varphi$
- ▶ $\mathbf{AG}\varphi \sim \neg\mathbf{EF}\neg\varphi$
- ▶ $\mathbf{EF}\varphi \sim \mathbf{E}(\uparrow\mathbf{U}\varphi)$
- ▶ $\mathbf{A}(\varphi\mathbf{U}\psi) \sim \neg\mathbf{E}(\neg\psi\mathbf{U}(\neg\varphi \& \neg\psi)) \& \neg\mathbf{EG}\neg\psi$

Лемма о равносильностях в СТЛ

$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$ и $\varphi \vee \psi \sim \neg(\neg\varphi \& \neg\psi)$ — в точности как и в логиках высказываний и предикатов

AX $\varphi \sim \neg$ **EX** $\neg\varphi$: покажем, что для любых МК $M = (S, S_0, \mapsto, L)$ и её состояния s верно

$$M, s \models \mathbf{AX}\varphi \Leftrightarrow M, s \models \neg\mathbf{EX}\neg\varphi$$

Верно $M, s \models \mathbf{AX}\varphi$

\Leftrightarrow (по семантике комбинации **AX**)

Для любого состояния s' , такого что $s \mapsto s'$, верно $M, s' \models \varphi$

\Leftrightarrow (т.к. $\forall x (A \rightarrow B) \sim \neg\exists x (A \& \neg B)$)

Не существует состояние s' , такое что $s \mapsto s'$ и неверно $M, s' \models \varphi$

\Leftrightarrow (по семантике \neg)

Не существует состояние s' , такое что $s \mapsto s'$ и верно $M, s' \models \neg\varphi$

\Leftrightarrow (по семантике комбинации **EX**)

Неверно $M, s \models \mathbf{EX}\neg\varphi$

\Leftrightarrow (по семантике \neg)

Верно $M, s \models \neg\mathbf{EX}\neg\varphi$

Лемма о равносильностях в CTL

$\mathbf{AF}\varphi \sim \neg \mathbf{EG}\neg\varphi$ и $\mathbf{AG}\varphi \sim \neg \mathbf{EF}\neg\varphi$ — аналогично

$\mathbf{EF}\varphi \sim \mathbf{E}(\uparrow \mathbf{U}\varphi)$ — очевидно следует

из семантики комбинаций \mathbf{EF} и \mathbf{EU} и формулы \uparrow

$\mathbf{A}(\varphi \mathbf{U} \psi) \sim \neg \mathbf{E}(\neg \psi \mathbf{U}(\neg \varphi \ \& \ \neg \psi)) \ \& \ \neg \mathbf{EG}\neg \psi$:

$M, s \models \mathbf{A}(\varphi \mathbf{U} \psi)$

\Leftrightarrow (по семантике комбинации \mathbf{AU})

\forall пути π из s в M $\exists i$: $M, \pi[i] \models \psi$ и $\forall j < i$ верно $M, \pi[j] \models \varphi$

\Leftrightarrow (по двойственности \forall - \exists и $\&$ - \vee)

Не \exists путь π из s в M : $\forall i$ верно ($M, \pi[i] \not\models \psi$ или $\exists j < i$: $M, \pi[j] \not\models \varphi$)

\Leftrightarrow (применяем метод пристального взгляда)

1. Не \exists путь π из s в M и номер i :

$M, \pi[i] \not\models \varphi$, $M, \pi[i] \not\models \psi$ и $\forall j < i$ верно $M, \pi[j] \not\models \psi$

и

2. не \exists путь π из s в M : $\forall i$ верно $M, \pi[i] \not\models \psi$

\Leftrightarrow (по семантике \mathbf{E} , \mathbf{U} , \mathbf{G} , \neg и $\&$)

$M, s \models \neg \mathbf{E}(\neg \psi \mathbf{U}(\neg \varphi \ \& \ \neg \psi)) \ \& \ \neg \mathbf{EG}\neg \psi$ ▼

Алгоритм проверки моделей для CTL

Процедура *Simplify*(φ)

Дано: формула φ CTL

Результат: упрощённая формула ψ CTL, такая что $\varphi \sim \psi$

Тело процедуры:

1. Пока это возможно, преобразовывать формулу φ согласно равносильностям из **последней леммы**, заменяя подформулу, отвечающую левой части равносильности, на правую часть
2. Вернуть формулу, получившуюся после всех преобразований

Корректность процедуры *Simplify* обеспечивается тем, что

- ▶ наряду с **последней леммой** для CTL справедлива такая же **теорема о равносильной замене**, как и для логики предикатов, и
- ▶ цикл упрощающих преобразований обязательно завершается: если в исходной формуле содержится n подформул, отвечающих левым частям равносильностей, то после не более чем $2n$ преобразований формула обязательно станет упрощённой, и цикл завершится

Алгоритм проверки моделей для CTL

Процедура $\Pi_{sat}^s(M, \varphi)$

Дано: конечная МК $M = (S, S_0, \mapsto, L)$; упрощённая формула φ CTL

Результат: $Sat(M, \varphi)$

Тело процедуры:

1. Если $\varphi = \mathbb{t}$, то вернуть S
2. Если $\varphi = p \in \mathcal{AP}$, то вернуть $\{s \mid s \in S, p \in L(s)\}$
3. Если $\varphi = \psi_1 \& \psi_2$, то вернуть $\Pi_{sat}^s(M, \psi_1) \cap \Pi_{sat}^s(M, \psi_2)$
4. Если $\varphi = \neg\psi$, то вернуть $S \setminus \Pi_{sat}^s(M, \psi)$
5. Если $\varphi = \mathbf{EX}\psi$, то вернуть $\Pi_{EX}(M, \psi)$
6. Если $\varphi = \mathbf{EG}\psi$, то вернуть $\Pi_{EG}(M, \psi)$
7. Если $\varphi = \mathbf{E}(\psi_1 \mathbf{U} \psi_2)$, то вернуть $\Pi_{EU}(M, \psi_1, \psi_2)$

Корректность этой процедуры для пунктов 1–4 **очевидна**
(обеспечивается семантикой формул)

Осталось предложить подходящие процедуры Π_{EX} , Π_{EG} и Π_{EU}

Алгоритм проверки моделей для CTL

$Pre(\Gamma, v)$ — так для графа Γ и его вершины v обозначим множество вершин, из которых v достижима по одной дуге:

$$Pre(\Gamma, v) = \{w \mid (w \mapsto v) \in \Gamma\}$$

$Pre(\Gamma, X)$ — так для графа Γ и множества X его вершин обозначим множество вершин, из которых по одной дуге достижима хотя бы одна вершина из X : $Pre(\Gamma, V) = \bigcup_{v \in V} Pre(\Gamma, v)$

Лемма. Для любой МК M и любой формулы φ CTL справедливо равенство $Sat(M, \mathbf{EX}\varphi) = Pre(M, Sat(M, \varphi))$

Доказательство

$$s \in Sat(M, \mathbf{EX}\varphi) \Leftrightarrow (\text{по определению } Sat)$$

$$M, s \models \mathbf{EX}\varphi \Leftrightarrow (\text{по семантике } \mathbf{E} \text{ и } \mathbf{X})$$

$$\exists \text{ состояние } s': s \rightarrow s' \text{ и } M, s' \models \varphi \Leftrightarrow (\text{по определению } Sat)$$

$$\exists \text{ состояние множества } Sat(M, \varphi), \text{ достижимое из } s \text{ по одной дуге}$$

$$\Leftrightarrow (\text{по определению } Pre)$$

$$s \in Pre(M, Sat(M, \varphi)) \quad \blacktriangledown$$

Алгоритм проверки моделей для CTL

Процедура $\Pi_{EX}(M, \varphi)$

Дано: конечная МК M ; упрощённая формула φ CTL

Результат: $Sat(M, \mathbf{EX}\varphi)$

Тело процедуры:

1. Вычислить $X = \Pi_{sat}^s(M, \varphi)$
2. Вернуть множество $Pre(M, X)$

Алгоритм проверки моделей для CTL

Лемма. Для любой конечной МК M и любых формул φ_1, φ_2 CTL верно следующее: $s \in \text{Sat}(M, \mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2)) \Leftrightarrow$
в M существует путь $s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_k$,
такой что $s_1 = s$, $s_k \in \text{Sat}(M, \varphi_2)$ и $\{s_1, \dots, s_{k-1}\} \subseteq \text{Sat}(M, \varphi_1)$

Доказательство.

$s \in \text{Sat}(M, \mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2))$

\Leftrightarrow (по определению Sat)

$M, s \models \mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2)$

\Leftrightarrow (по определению \mathbf{E} и \mathbf{U})

\exists бесконечный путь π из s в M и номер k :

$M, \pi[k] \models \varphi_2$ и $\forall i < k$ верно $M, \pi[i] \models \varphi_1$

\Leftrightarrow (переформулировка)

\exists путь $s_1 \mapsto \dots \mapsto s_k$ в M (префикс пути π):

$s_1 = s$, $M, s_k \models \varphi_2$ и $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$ верно $M, s_i \models \varphi_1$

\Leftrightarrow (по определению Sat)

\exists путь $s_1 \mapsto \dots \mapsto s_k$ в M :

$s_1 = s$, $s_k \in \text{Sat}(M, \varphi_2)$ и $\{s_1, \dots, s_{k-1}\} \subseteq \text{Sat}(M, \varphi_1)$ ▼

Алгоритм проверки моделей для CTL

Процедура $\Pi_{EU}(M, \varphi_1, \varphi_2)$

Дано: конечная МК M ; упрощённые формулы φ_1, φ_2 CTL

Результат: $Sat(M, \mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2))$

Тело процедуры:

1. Вычислить $X_1 = \Pi_{sat}^s(M, \varphi_2)$ и $Z = \Pi_{sat}^s(M, \varphi_1)$
2. Последовательно вычислять множества X_2, X_3, \dots
по схеме $X_i = X_{i-1} \cup (Pre(M, X_{i-1}) \cap Z)$,
пока для очередного X_i не окажется верно $X_i = X_{i-1}$
3. Вернуть последнее вычисленное множество X_i

Корректность этой процедуры обосновывается

- ▶ последней леммой,
- ▶ наблюдением «на грани очевидного» о том, что в множество X_i входят все вершины всех путей вида $s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_i$, где $s_i \in Sat(M, \varphi_2)$ и $\{s_1, \dots, s_{i-1}\} \subseteq Sat(M, \varphi_1)$, и
- ▶ гарантированным равенством $X_i = X_{i-1}$ хотя бы для одного i в связи с конечностью M

Алгоритм проверки моделей для CTL

Вершина u **достижима** из вершины v в ориентированном графе Γ , если в Γ существует путь из v в u (быть может, тривиальный, если $u = v$)

Ориентированный граф **сильно связан**, если любые его две вершины достижимы друг из друга

Компонента сильной связности (**КСС**) ориентированного графа — это максимальный по включению вершин и дуг сильно связный подграф этого графа

Компонента сильной связности **нетривиальна** (**НКСС**), если в ней содержится хотя бы одна дуга

Алгоритм проверки моделей для CTL

Лемма. В конечном ориентированном графе Γ из вершины s исходит хотя бы один бесконечный путь \Leftrightarrow
в Γ из s достижима хотя бы одна НКСС

Доказательство.

(\Leftarrow) Пусть π — путь из s , оканчивающийся в вершине v НКСС

По выбору v , существует путь из v в v с хотя бы одной дугой

Пусть π' — указанный путь из v в v без первой вершины v

Тогда в Γ содержится и бесконечный путь, исходящий из s :

$$\pi \pi' \pi' \dots \pi' \dots$$

(\Rightarrow) Рассмотрим бесконечный путь π в Γ , исходящий из s

Так как граф Γ конечен, то в π содержится хотя бы одна вершина v , встречающаяся хотя бы два раза: $\pi[i] = \pi[i+k] = v$, $k > 0$

Тогда все вершины множества $\{\pi[i+1], \dots, \pi[i+k]\}$ достижимы друг из друга, то есть входят в некоторую НКСС,
и эта НКСС достижима из s по пути $\pi[1] \rightarrow \dots \rightarrow \pi[i]$ ▼

Алгоритм проверки моделей для CTL

Для ориентированного графа Γ и подмножества V его вершин записью $\Gamma|_V$ обозначим **подграф графа Γ , порождённый множеством V :**

- ▶ Множество вершин $\Gamma|_V$ — это V
- ▶ $(s_1, s_2) \in \Gamma|_V \Leftrightarrow \{s_1, s_2\} \subseteq V$ и $(s_1, s_2) \in \Gamma$
- ▶ Если граф Γ размечен, то все метки переносятся из Γ в $\Gamma|_V$

Лемма. Для любой конечной модели Крипке M и любой формулы φ CTL верно следующее: $s \in \text{Sat}(M, \mathbf{EG}\varphi) \Leftrightarrow s \in M|_{\text{Sat}(M, \varphi)}$ и из s в $M|_{\text{Sat}(M, \varphi)}$ достижима хотя бы одна НКСС

Доказательство.

$$s \in \text{Sat}(M, \mathbf{EG}\varphi) \Leftrightarrow M, s \models \mathbf{EG}\varphi \Leftrightarrow$$

в M существует бесконечный путь π , исходящий из s и такой что $M, \pi[i] \models \varphi$ для каждого момента времени $i \Leftrightarrow$

в $\Gamma = M|_{\text{Sat}(M, \varphi)}$ существует бесконечный путь, исходящий из $s \Leftrightarrow$
в Γ содержится s и из неё достижима хотя бы одна НКСС ▼

Алгоритм проверки моделей для CTL

Процедура $\Pi_{EG}(M, \varphi)$

Дано: конечная МК M ; упрощённая формула φ CTL

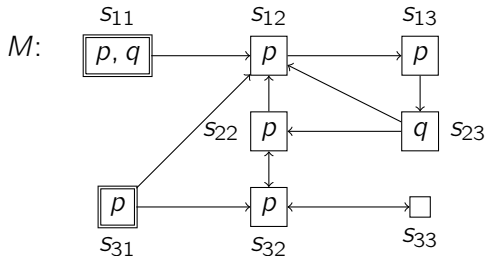
Результат: $Sat(M, \mathbf{EG}\varphi)$

Тело процедуры:

- ▶ Вычислить множество $Z = Sat(M, \varphi)$
- ▶ Вычислить граф $\Gamma = M|_Z$
- ▶ Каким-либо известным эффективным алгоритмом вычислить множество X_1 всех вершин, входящих в какие-либо НКСС в Γ
- ▶ Последовательно вычислять множества X_2, X_3, \dots по схеме $X_i = X_{i-1} \cup Pre(\Gamma, X_{i-1})$, пока для очередного X_i не окажется верно $X_i = X_{i-1}$
- ▶ Вернуть последнее вычисленное множество X_i

Корректность этой процедуры обосновывается аналогично корректности Π_{EU}

Алгоритм проверки моделей для CTL (пример)



$$\varphi = \mathbf{AXA}(p\mathbf{U}q)$$

$$M \models \varphi?$$

$$\psi = \text{Simplify}(\varphi) = \neg \mathbf{EX} \neg (\neg \mathbf{E} (\neg q \mathbf{U} (\neg q \& \neg p))) \& \neg \mathbf{EG} \neg q$$

$$\Pi_{sat}^s(M, q) = \{s_{11}, s_{23}\}$$

$$S = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{23}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

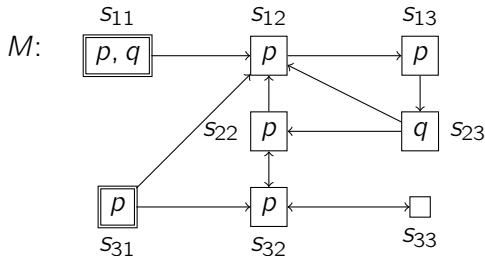
$$\Pi_{sat}^s(M, \neg q) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, q) = \{s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, p) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{31}, s_{32}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg p) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, p) = \{s_{23}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg q \& \neg p) = \Pi_{sat}^s(M, \neg q) \cap \Pi_{sat}^s(M, \neg p) = \{s_{33}\}$$

Алгоритм проверки моделей для CTL (пример)



$$\varphi = \mathbf{AXA}(p\mathbf{U}q)$$

$$M \models \varphi?$$

$$\psi = \text{Simplify}(\varphi) = \neg \mathbf{EX} \neg (\underbrace{\neg \mathbf{E}(\neg q \mathbf{U}(\neg q \& \neg p))}_{\chi_1} \& \underbrace{\neg \mathbf{EG} \neg q}_{\chi_2})$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \chi_1) = \{s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \chi_2) = \{s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \mathbf{E}(\chi_1 \mathbf{U} \chi_2)) = ?$$

$$\blacktriangleright X_1 = \Pi_{sat}^s(M, \chi_2), Z = \Pi_{sat}^s(M, \chi_1)$$

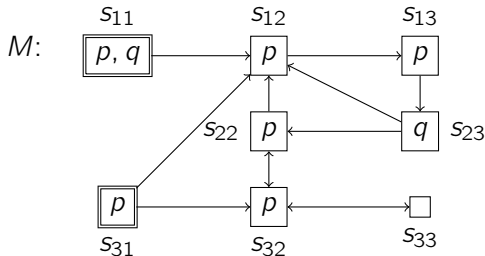
$$\blacktriangleright X_2 = X_1 \cup (\text{Pre}(M, X_1) \cap Z) = \{s_{32}, s_{33}\}$$

$$\blacktriangleright X_3 = X_2 \cup (\text{Pre}(M, X_2) \cap Z) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\blacktriangleright X_4 = X_3 \cup (\text{Pre}(M, X_3) \cap Z) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\} = X_3$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \mathbf{E}(\chi_1 \mathbf{U} \chi_2)) = X_4 = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

Алгоритм проверки моделей для CTL (пример)



$$\varphi = \mathbf{AXA}(p\mathbf{U}q)$$

$$M \models \varphi?$$

$$\psi = \text{Simplify}(\varphi) = \neg \mathbf{EX} \neg (\neg \mathbf{E} (\neg q \mathbf{U} (\neg q \& \neg p))) \& \neg \mathbf{EG} \underbrace{\neg q}_{\chi}$$

$$\Pi_{\text{sat}}^s(M, \chi) = \{s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{\text{sat}}^s(M, \mathbf{EG}\chi) = ?$$

$$\blacktriangleright Z = \Pi_{\text{sat}}^s(M, \chi)$$

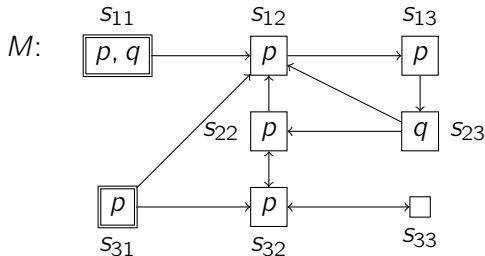
\blacktriangleright В графе $M|_Z$ содержится ровно одна нетривиальная компонента сильной связности, и её вершины: $X_1 = \{s_{22}, s_{32}, s_{33}\}$

$$\blacktriangleright X_2 = X_1 \cup \text{Pre}(M|_Z, X_1) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\blacktriangleright X_3 = X_2 \cup \text{Pre}(M|_Z, X_2) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\} = X_2$$

$$\Pi_{\text{sat}}^s(M, \mathbf{EG}\chi) = X_3 = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

Алгоритм проверки моделей для CTL (пример)



$$\varphi = \mathbf{AXA}(p\mathbf{U}q)$$

$$M \models \varphi?$$

$$\psi = \text{Simplify}(\varphi) = \neg \mathbf{EX} \neg \underbrace{(\neg \mathbf{E}(\neg q \mathbf{U}(\neg q \& \neg p)))}_{\chi_1} \& \neg \underbrace{\mathbf{EG} \neg q}_{\chi_2}$$

$$S = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{23}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \chi_1) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

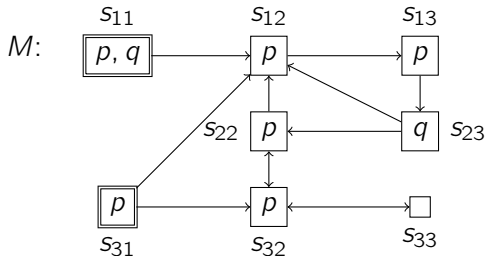
$$\Pi_{sat}^s(M, \chi_2) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg \chi_1) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, \chi_1) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{23}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg \chi_2) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, \chi_2) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{23}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg \chi_1 \& \neg \chi_2) = \Pi_{sat}^s(M, \chi_1) \cap \Pi_{sat}^s(M, \chi_2) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{23}\}$$

Алгоритм проверки моделей для CTL (пример)



$$\varphi = \mathbf{AXA}(p\mathbf{U}q)$$

$$M \models \varphi?$$

$$\psi = \text{Simplify}(\varphi) = \neg \mathbf{EX} \neg \underbrace{(\neg \mathbf{E}(\neg q \mathbf{U}(\neg q \& \neg p)) \& \neg \mathbf{EG} \neg q)}_{\chi}$$

$$S = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{23}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \chi) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{23}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg \chi) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, \chi) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \mathbf{EX} \neg \chi) = \text{Pre}(M, \Pi_{sat}^s(M, \neg \chi)) = \{s_{22}, s_{23}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \psi) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, \mathbf{EX} \neg \chi) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}\}$$

$$S_0 = \{s_{11}, s_{31}\} \not\subseteq \Pi_{sat}^s(M, \psi)$$

Следовательно, $M \not\models \varphi$