

# Математическая логика и логическое программирование

[mk.cs.msu.ru](http://mk.cs.msu.ru) → Лекционные курсы

→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 53

Алгоритм проверки моделей  
для логики ветвящегося времени

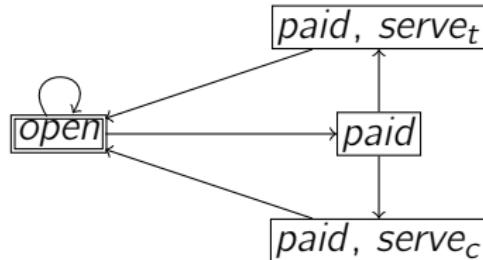
Лектор:

Подымов Владислав Васильевич  
E-mail:  
[valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

# Напоминание

Модель Крипке  $M$  над множеством атомарных высказываний  $\mathcal{AP}$ :



Примеры формул CTL  $\varphi$  над тем же множеством  $\mathcal{AP}$ :

$$\begin{aligned} & \textit{open} \And \neg \textit{paid} \And \neg \textit{serve}_t \And \neg \textit{serve}_c \\ & \neg \mathbf{EF}(\neg \textit{paid} \And (\textit{serve}_c \Or \textit{serve}_t)) \\ & \mathbf{AG}(\textit{paid} \rightarrow \mathbf{AF}(\textit{serve}_c \Or \textit{serve}_t)) \\ & \mathbf{EF}(\textit{paid} \And \mathbf{EG} \neg \textit{serve}_t) \\ & \mathbf{AG}(\neg \textit{paid} \rightarrow \mathbf{AX}(\textit{paid} \rightarrow \mathbf{EF} \textit{serve}_t)) \end{aligned}$$

$$M \models \varphi \Leftrightarrow$$

формула  $\varphi$  выполняется в каждом начальном состоянии системы  $M$

# Алгоритм проверки моделей для CTL

Алгоритм проверки соотношения  $M \models \varphi$  для МК  $M$  и формулы  $\varphi$  CTL будет излагаться «сверху вниз» от общей схемы (главной процедуры) к деталям реализации этой схемы (остальным процедурам)

По ходу изложения будет приводиться  
обоснование корректности (правильности) каждой процедуры

«Описание алгоритма

+ обоснование корректности  
+ оценка сложности» —

типовочное сочетание в «умном» изложении алгоритмов, позволяющее

- ▶ понять, как это реализовать,
- ▶ убедиться, что это действительно работает правильно, и
- ▶ оценить, достаточно ли эффективно решение для желаемых целей

Но оценку сложности приводить не будем,  
чтобы не перегружать рассказ излишними деталями

# Алгоритм проверки моделей для CTL

$Sat(M, \psi)$  — так будем обозначать множество состояний МК  $M$ , в которых выполняется формула  $\psi$ :  $Sat(M, \psi) = \{s \mid s \in S, M, s \models \psi\}$

**Лемма.** Для любых МК  $M = (S, S_0, \rightarrow, L)$  и формулы  $\varphi$  CTL верно:

$$M \models \varphi \Leftrightarrow S_0 \subseteq Sat(M, \varphi)$$

**Доказательство.** Напрямую следует из

определений соотношения  $M \models \varphi$  и множества  $Sat(M, \varphi)$  ▼

## Главная процедура

*Дано:* конечная МК  $M$ ; формула  $\varphi$  CTL

*Результат:* ответ на вопрос « $M \models \varphi?$ »

*Тело процедуры:*

1. Вычислить множество  $X = \Pi_{sat}(M, \varphi) = Sat(M, \varphi)$
2. Проверить соотношение  $S_0 \subseteq X$
3. Вернуть результат проверки пункта 2

# Алгоритм проверки моделей для CTL

Формулу  $\varphi$  CTL назовём **упрощённой**, если она задаётся БНФ

$$\varphi ::= t \mid p \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\neg \varphi) \mid (\mathbf{EX} \varphi) \mid (\mathbf{EG} \varphi) \mid (\mathbf{E}(\varphi \mathbf{U} \varphi))$$

Формулы  $\psi_1$  и  $\psi_2$  CTL назовём **равносильными** ( $\psi_1 \sim \psi_2$ ),  
если для любой МК  $M$  верно  $Sat(M, \psi_1) = Sat(M, \psi_2)$

## Процедура $\Pi_{sat}(M, \varphi)$

*Дано:* конечная МК  $M$ ; формула  $\varphi$  CTL

*Результат:*  $Sat(M, \varphi)$

*Тело процедуры:*

1. Построить упрощённую формулу  $\psi$ , равносильную исходной:

$$\psi = Simplify(\varphi)$$

2. Вернуть множество  $Sat(M, \psi)$  для упрощённой формулы:

$$\Pi_{sat}^s(M, \psi)$$

# Алгоритм проверки моделей для CTL

Лемма (о равносильностях в CTL)

Для любых формул  $\varphi$  и  $\psi$  CTL

справедливы следующие равносильности:

- ▶  $\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$
- ▶  $\varphi \vee \psi \sim \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- ▶  $\mathbf{AX}\varphi \sim \neg\mathbf{EX}\neg\varphi$
- ▶  $\mathbf{AF}\varphi \sim \neg\mathbf{EG}\neg\varphi$
- ▶  $\mathbf{AG}\varphi \sim \neg\mathbf{EF}\neg\varphi$
- ▶  $\mathbf{EF}\varphi \sim \mathbf{E}(\mathbf{tU}\varphi)$
- ▶  $\mathbf{A}(\varphi \mathbf{U} \psi) \sim \neg\mathbf{E}(\neg\psi \mathbf{U} (\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \wedge \neg\mathbf{EG}\neg\psi$

## Лемма о равносильностях в CTL

$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$  и  $\varphi \vee \psi \sim \neg(\neg\varphi \& \neg\psi)$  — в точности как и в логиках высказываний и предикатов

**AX** $\varphi \sim \neg EX \neg\varphi$ : покажем, что для любых МК  $M = (S, S_0, \mapsto, L)$  и её состояния  $s$  верно  $M, s \models AX\varphi \Leftrightarrow M, s \models \neg EX \neg\varphi$

Верно  $M, s \models AX\varphi$

$\Leftrightarrow$  (по семантике комбинации **AX**)

Для любого состояния  $s'$ , такого что  $s \mapsto s'$ , верно  $M, s' \models \varphi$

$\Leftrightarrow$  (т.к.  $\forall x (A \rightarrow B) \sim \neg \exists x (A \& \neg B)$ )

Не существует состояния  $s'$ , такое что  $s \mapsto s'$  и неверно  $M, s' \models \varphi$

$\Leftrightarrow$  (по семантике **¬**)

Не существует состояния  $s'$ , такое что  $s \mapsto s'$  и верно  $M, s' \models \neg\varphi$

$\Leftrightarrow$  (по семантике комбинации **EX**)

Неверно  $M, s \not\models EX \neg\varphi$

$\Leftrightarrow$  (по семантике **¬**)

Верно  $M, s \models \neg EX \neg\varphi$

## Лемма о равносильностях в CTL

$\mathbf{AF}\varphi \sim \neg\mathbf{EG}\neg\varphi$  и  $\mathbf{AG}\varphi \sim \neg\mathbf{EF}\neg\varphi$  — аналогично

$\mathbf{EF}\varphi \sim \mathbf{E}(\mathbf{tU}\varphi)$  — очевидно следует

из семантики комбинаций  $\mathbf{EF}$  и  $\mathbf{EU}$  и формулы  $\mathbf{t}$

$\mathbf{A}(\varphi\mathbf{U}\psi) \sim \neg\mathbf{E}(\neg\psi\mathbf{U}(\neg\varphi \& \neg\psi)) \& \neg\mathbf{EG}\neg\psi$ :

$M, s \models \mathbf{A}(\varphi\mathbf{U}\psi)$

$\Leftrightarrow$  (по семантике комбинации  $\mathbf{AU}$ )

$\forall$  пути  $\pi$  из  $s$  в  $M \exists i: M, \pi[i] \models \psi$  и  $\forall j < i$  верно  $M, \pi[j] \models \varphi$

$\Leftrightarrow$  (по двойственности  $\forall\exists$  и  $\&$ - $\vee$ )

Не  $\exists$  путь  $\pi$  из  $s$  в  $M: \forall i$  верно  $(M, \pi[i] \not\models \psi$  или  $\exists j < i: M, \pi[j] \not\models \varphi)$

$\Leftrightarrow$  (применяем метод пристального взгляда)

1. Не  $\exists$  путь  $\pi$  из  $s$  в  $M$  и номер  $i$ :

$M, \pi[i] \not\models \varphi, M, \pi[i] \not\models \psi$  и  $\forall j < i$  верно  $M, \pi[j] \not\models \psi$

и

2. не  $\exists$  путь  $\pi$  из  $s$  в  $M: \forall i$  верно  $M, \pi[i] \not\models \psi$

$\Leftrightarrow$  (по семантике  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\neg$  и  $\&$ )

$M, s \models \neg\mathbf{E}(\neg\psi\mathbf{U}(\neg\varphi \& \neg\psi)) \& \neg\mathbf{EG}\neg\psi$  ▼

# Алгоритм проверки моделей для CTL

## Процедура $Simplify(\varphi)$

Дано: формула  $\varphi$  CTL

Результат: упрощённая формула  $\psi$  CTL, такая что  $\varphi \sim \psi$

Тело процедуры:

1. Пока это возможно, преобразовывать формулу  $\varphi$  согласно равносильностям из **последней леммы**, заменяя подформулу, отвечающую левой части равносильности, на правую часть
2. Вернуть формулу, получившуюся после всех преобразований

Корректность процедуры  $Simplify$  обеспечивается тем, что

- ▶ наряду с **последней леммой** для CTL справедлива такая же **теорема о равносильной замене**, как и для логики предикатов, и
- ▶ цикл упрощающих преобразований обязательно завершается: если в исходной формуле содержится  $p$  подформул, отвечающих левым частям равносильностей, то после не более чем  $2p$  преобразований формула обязательно станет упрощённой, и цикл завершится

# Алгоритм проверки моделей для CTL

## Процедура $\Pi_{sat}^s(M, \varphi)$

Дано: конечная МК  $M = (S, S_0, \mapsto, L)$ ; упрощённая формула  $\varphi$  CTL

Результат:  $Sat(M, \varphi)$

Тело процедуры:

1. Если  $\varphi = t$ , то вернуть  $S$
2. Если  $\varphi = p \in AP$ , то вернуть  $\{s \mid s \in S, p \in L(s)\}$
3. Если  $\varphi = \psi_1 \& \psi_2$ , то вернуть  $\Pi_{sat}^s(M, \psi_1) \cap \Pi_{sat}^s(M, \psi_2)$
4. Если  $\varphi = \neg\psi$ , то вернуть  $S \setminus \Pi_{sat}^s(M, \psi)$
5. Если  $\varphi = \mathbf{EX}\psi$ , то вернуть  $\Pi_{EX}(M, \psi)$
6. Если  $\varphi = \mathbf{EG}\psi$ , то вернуть  $\Pi_{EG}(M, \psi)$
7. Если  $\varphi = \mathbf{E}(\psi_1 \mathbf{U} \psi_2)$ , то вернуть  $\Pi_{EU}(M, \psi_1, \psi_2)$

Корректность этой процедуры для пунктов 1–4 очевидна  
(обеспечивается семантикой формул)

Осталось предложить подходящие процедуры  $\Pi_{EX}$ ,  $\Pi_{EG}$  и  $\Pi_{EU}$

## Алгоритм проверки моделей для CTL

$Pre(\Gamma, v)$  — так для графа  $\Gamma$  и его вершины  $v$  обозначим множество вершин, из которых  $v$  достижима по одной дуге:

$$Pre(\Gamma, v) = \{w \mid (w \mapsto v) \in \Gamma\}$$

$Pre(\Gamma, X)$  — так для графа  $\Gamma$  и множества  $X$  его вершин обозначим множество вершин, из которых по одной дуге достижима хотя бы одна вершина из  $X$ :  $Pre(\Gamma, V) = \bigcup_{v \in V} Pre(\Gamma, v)$

**Лемма.** Для любой МК  $M$  и любой формулы  $\varphi$  CTL справедливо равенство  $Sat(M, \mathbf{EX}\varphi) = Pre(M, Sat(M, \varphi))$

Доказательство

$$s \in Sat(M, \mathbf{EX}\varphi) \Leftrightarrow (\text{по определению } Sat)$$

$$M, s \models \mathbf{EX}\varphi \Leftrightarrow (\text{по семантике } \mathbf{E} \text{ и } \mathbf{X})$$

$$\exists \text{ состояние } s': s \rightarrow s' \text{ и } M, s' \models \varphi \Leftrightarrow (\text{по определению } Sat)$$

$\exists$  состояние множества  $Sat(M, \varphi)$ , достижимое из  $s$  по одной дуге  
 $\Leftrightarrow (\text{по определению } Pre)$

$$s \in Pre(M, Sat(M, \varphi)) \blacktriangledown$$

# Алгоритм проверки моделей для CTL

Процедура  $\Pi_{\text{EX}}(M, \varphi)$

Дано: конечная МК  $M$ ; упрощённая формула  $\varphi$  CTL

Результат:  $Sat(M, \text{EX}\varphi)$

Тело процедуры:

1. Вычислить  $X = \Pi_{sat}^s(M, \varphi)$
2. Вернуть множество  $Pre(M, X)$

## Алгоритм проверки моделей для CTL

**Лемма.** Для любой конечной МК  $M$  и любых формул  $\varphi_1, \varphi_2$  CTL верно следующее:  $s \in Sat(M, \mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2)) \Leftrightarrow$   
в  $M$  существует путь  $s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_k$ ,  
такой что  $s_1 = s$ ,  $s_k \in Sat(M, \varphi_2)$  и  $\{s_1, \dots, s_{k-1}\} \subseteq Sat(M, \varphi_1)$

**Доказательство.**

$$s \in Sat(M, \mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2))$$

$$\Leftrightarrow (\text{по определению } Sat)$$

$$M, s \models \mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2)$$

$$\Leftrightarrow (\text{по определению } \mathbf{E} \text{ и } \mathbf{U})$$

$\exists$  бесконечный путь  $\pi$  из  $s$  в  $M$  и номер  $k$ :

$$M, \pi[k] \models \varphi_2 \text{ и } \forall i < k \text{ верно } M, \pi[i] \models \varphi_1$$

$$\Leftrightarrow (\text{переформулировка})$$

$\exists$  путь  $s_1 \mapsto \dots \mapsto s_k$  в  $M$  (префикс пути  $\pi$ ):

$$s_1 = s, M, s_k \models \varphi_2 \text{ и } \forall i \in \{1, \dots, k-1\} \text{ верно } M, s_i \models \varphi_1$$

$$\Leftrightarrow (\text{по определению } Sat)$$

$\exists$  путь  $s_1 \mapsto \dots \mapsto s_k$  в  $M$ :

$$s_1 = s, s_k \in Sat(M, \varphi_2) \text{ и } \{s_1, \dots, s_{k-1}\} \subseteq Sat(M, \varphi_1) \blacktriangledown$$

# Алгоритм проверки моделей для CTL

Процедура  $\text{П}_{\text{ЕУ}}(M, \varphi_1, \varphi_2)$

Дано: конечная МК  $M$ ; упрощённые формулы  $\varphi_1, \varphi_2$  CTL

Результат:  $Sat(M, \mathbf{E}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2))$

Тело процедуры:

1. Вычислить  $X_1 = \Pi_{sat}^s(M, \varphi_2)$  и  $Z = \Pi_{sat}^s(M, \varphi_1)$
2. Последовательно вычислять множества  $X_2, X_3, \dots$  по схеме  $X_i = X_{i-1} \cup (Pre(M, X_{i-1}) \cap Z)$ , пока для очередного  $X_i$  не окажется верно  $X_i = X_{i-1}$
3. Вернуть последнее вычисленное множество  $X_i$

Корректность этой процедуры обосновывается

- ▶ последней леммой,
- ▶ наблюдением «на грани очевидного» о том, что в множество  $X_i$  входят все вершины всех путей вида  $s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_i$ , где  $s_i \in Sat(M, \varphi_2)$  и  $\{s_1, \dots, s_{i-1}\} \subseteq Sat(M, \varphi_1)$ , и
- ▶ гарантированным равенством  $X_i = X_{i-1}$  хотя бы для одного  $i$  в связи с конечностью  $M$

## Алгоритм проверки моделей для CTL

Вершина  $u$  **достижима** из вершины  $v$  в ориентированном графе  $\Gamma$ , если в  $\Gamma$  существует путь из  $v$  в  $u$  (быть может, тривиальный, если  $u = v$ )

Ориентированный граф **сильно связан**,  
если любые его две вершины достижимы друг из друга

Компонента сильной связности (**KCC**) ориентированного графа — это максимальный по включению вершин и дуг сильно связный подграф этого графа

Компонента сильной связности **нетривиальна** (**НКСС**),  
если в ней содержится хотя бы одна дуга

# Алгоритм проверки моделей для CTL

**Лемма.** В конечном ориентированном графе  $\Gamma$  из вершины  $s$  исходит хотя бы один бесконечный путь  $\Leftrightarrow$  в  $\Gamma$  из  $s$  достижима хотя бы одна НКСС

Доказательство.

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $\pi$  — путь из  $s$ , оканчивающийся в вершине  $v$  НКСС

По выбору  $v$ , существует путь из  $v$  в  $v$  с хотя бы одной дугой

Пусть  $\pi'$  — указанный путь из  $v$  в  $v$  без первой вершины  $v$

Тогда в  $\Gamma$  содержится и бесконечный путь, исходящий из  $s$ :

$$\pi\pi'\pi'\dots\pi'\dots$$

( $\Rightarrow$ ) Рассмотрим бесконечный путь  $\pi$  в  $\Gamma$ , исходящий из  $s$

Так как граф  $\Gamma$  конечен, то в  $\pi$  содержится хотя бы одна вершина  $v$ , встречающаяся хотя бы два раза:  $\pi[i] = \pi[i + k] = v$ ,  $k > 0$

Тогда все вершины множества  $\{\pi[i + 1], \dots, \pi[i + k]\}$  достижимы друг из друга, то есть входят в некоторую НКСС,  
и эта НКСС достижима из  $s$  по пути  $\pi[1] \rightarrow \dots \rightarrow \pi[i]$  ▼

# Алгоритм проверки моделей для CTL

Для ориентированного графа  $\Gamma$  и подмножества  $V$  его вершин записью  $\Gamma|_V$  обозначим подграфа графа  $\Gamma$ , порождённый множеством  $V$ :

- ▶ Множество вершин  $\Gamma|_V$  — это  $V$
- ▶  $(s_1, s_2) \in \Gamma|_V \Leftrightarrow \{s_1, s_2\} \subseteq V$  и  $(s_1, s_2) \in \Gamma$
- ▶ Если граф  $\Gamma$  размечен, то все метки переносятся из  $\Gamma$  в  $\Gamma|_V$

**Лемма.** Для любой конечной модели Кripке  $M$  и любой формулы  $\varphi$  CTL верно следующее:  $s \in \text{Sat}(M, \mathbf{E}\mathbf{G}\varphi) \Leftrightarrow s \in M|_{\text{Sat}(M, \varphi)}$  и из  $s$  в  $M|_{\text{Sat}(M, \varphi)}$  достижима хотя бы одна НКСС

Доказательство.

$$s \in \text{Sat}(M, \mathbf{E}\mathbf{G}\varphi) \Leftrightarrow M, s \models \mathbf{E}\mathbf{G}\varphi \Leftrightarrow$$

в  $M$  существует бесконечный путь  $\pi$ , исходящий из  $s$  и такой что  $M, \pi[i] \models \varphi$  для каждого момента времени  $i \Leftrightarrow$

в  $\Gamma = M|_{\text{Sat}(M, \varphi)}$  существует бесконечный путь, исходящий из  $s \Leftrightarrow$

в  $\Gamma$  содержится  $s$  и из неё достижима хотя бы одна НКСС ▼

# Алгоритм проверки моделей для CTL

Процедура  $\Pi_{\text{EG}}(M, \varphi)$

Дано: конечная МК  $M$ ; упрощённая формула  $\varphi$  CTL

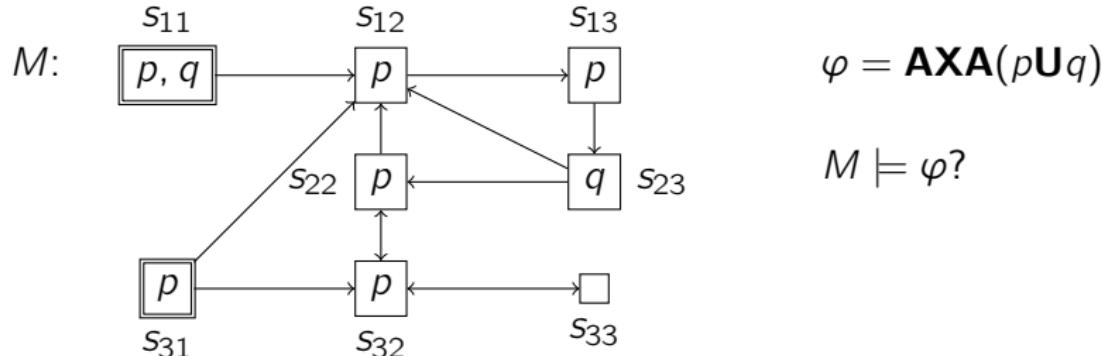
Результат:  $Sat(M, \mathbf{E}\mathbf{G}\varphi)$

Тело процедуры:

- ▶ Вычислить множество  $Z = Sat(M, \varphi)$
- ▶ Вычислить граф  $\Gamma = M|_Z$
- ▶ Каким-либо известным эффективным алгоритмом вычислить множество  $X_1$  всех вершин, входящих в какие-либо НКСС в  $\Gamma$
- ▶ Последовательно вычислять множества  $X_2, X_3, \dots$  по схеме  $X_i = X_{i-1} \cup Pre(\Gamma, X_{i-1})$ , пока для очередного  $X_i$  не окажется верно  $X_i = X_{i-1}$
- ▶ Вернуть последнее вычисленное множество  $X_i$

Корректность этой процедуры обосновывается аналогично корректности  $\Pi_{\text{EU}}$

## Алгоритм проверки моделей для CTL (пример)



$$\psi = Simplify(\varphi) = \neg \mathbf{EX} \neg (\neg \mathbf{E}(\neg q \mathbf{U} (\neg q \ \& \ \neg p)) \ \& \ \neg \mathbf{EG} \neg q)$$

$$\Pi_{sat}^s(M, q) = \{s_{11}, s_{23}\}$$

$$S = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{23}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

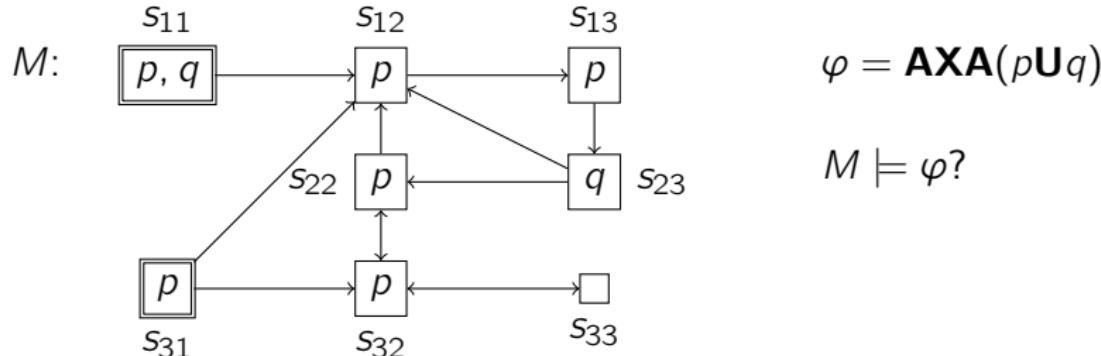
$$\Pi_{sat}^s(M, \neg q) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, q) = \{s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, p) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{31}, s_{32}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg p) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, p) = \{s_{23}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg q \ \& \ \neg p) = \Pi_{sat}^s(M, \neg q) \cap \Pi_{sat}^s(M, \neg p) = \{s_{33}\}$$

# Алгоритм проверки моделей для CTL (пример)



$$\psi = Simplify(\varphi) = \neg \mathbf{EX} \neg (\neg \mathbf{E}(\underbrace{\neg q}_{\chi_1} \mathbf{U} \underbrace{(\neg q \ \& \ \neg p)}_{\chi_2})) \ \& \ \neg \mathbf{EG} \neg q)$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \chi_1) = \{s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

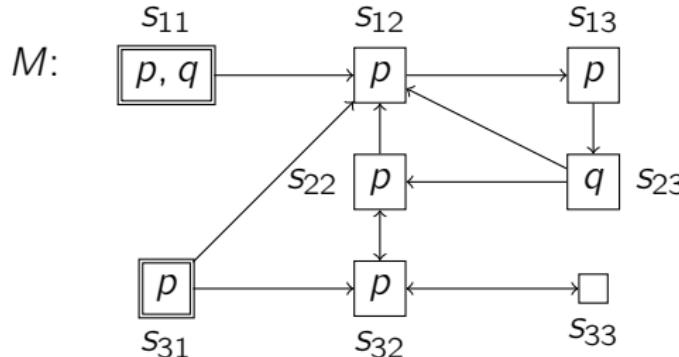
$$\Pi_{sat}^s(M, \chi_2) = \{s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \mathbf{E}(\chi_1 \mathbf{U} \chi_2)) = ?$$

- ▶  $X_1 = \Pi_{sat}^s(M, \chi_2), Z = \Pi_{sat}^s(M, \chi_1)$
- ▶  $X_2 = X_1 \cup (Pre(M, X_1) \cap Z) = \{s_{32}, s_{33}\}$
- ▶  $X_3 = X_2 \cup (Pre(M, X_2) \cap Z) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$
- ▶  $X_4 = X_3 \cup (Pre(M, X_3) \cap Z) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\} = X_3$

$$\Pi_{sat}^s(M, \mathbf{E}(\chi_1 \mathbf{U} \chi_2)) = X_4 = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

# Алгоритм проверки моделей для CTL (пример)



$$\varphi = \mathbf{AXA}(p \mathbf{U} q)$$

$$M \models \varphi?$$

$$\psi = Simplify(\varphi) = \neg \mathbf{EX} \neg (\neg \mathbf{E}(\neg q \mathbf{U} (\neg q \& \neg p)) \& \neg \mathbf{EG} \underbrace{\neg q}_{\chi})$$

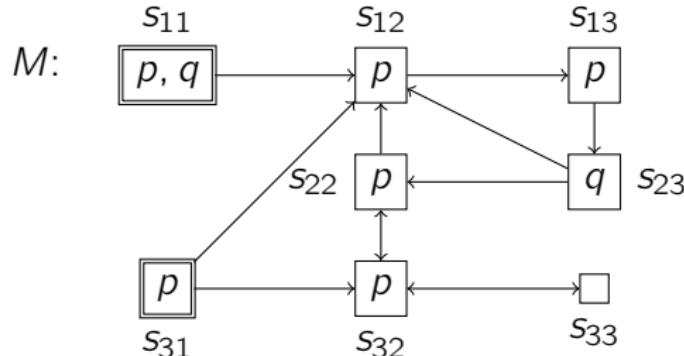
$$\Pi_{sat}^s(M, \chi) = \{s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \mathbf{EG}\chi) = ?$$

- ▶  $Z = \Pi_{sat}^s(M, \chi)$
- ▶ В графе  $M|_Z$  содержится ровно одна нетривиальная компонента сильной связности, и её вершины:  $X_1 = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$
- ▶  $X_2 = X_1 \cup Pre(M|_Z, X_1) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$
- ▶  $X_3 = X_2 \cup Pre(M|_Z, X_2) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\} = X_2$

$$\Pi_{sat}^s(M, \mathbf{EG}\chi) = X_3 = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

# Алгоритм проверки моделей для CTL (пример)



$$\varphi = \mathbf{AXA}(p \mathbf{U} q)$$

$$M \models \varphi?$$

$$\psi = Simplify(\varphi) = \neg \mathbf{EX} \neg (\underbrace{\neg \mathbf{E}(\neg q \mathbf{U} (\neg q \ \& \ \neg p))}_{\chi_1} \ \& \ \neg \underbrace{\mathbf{EG} \neg q}_{\chi_2})$$

$$S = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{23}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \chi_1) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

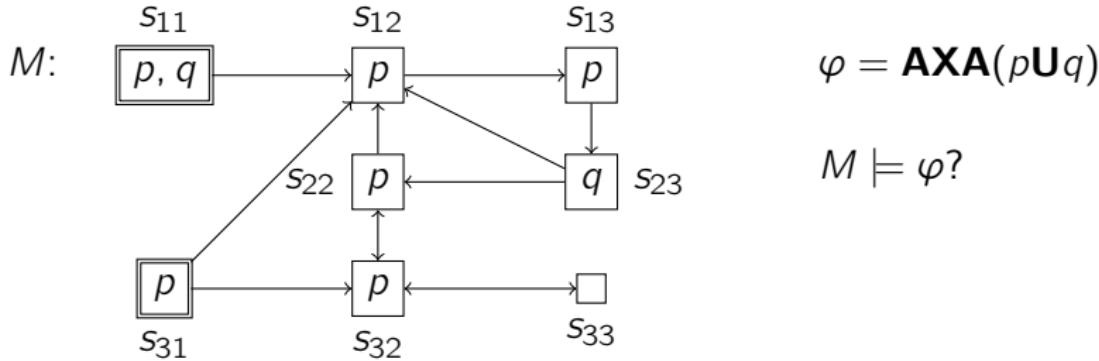
$$\Pi_{sat}^s(M, \chi_2) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg \chi_1) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, \chi_1) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{23}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg \chi_2) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, \chi_2) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{23}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg \chi_1 \ \& \ \neg \chi_2) = \Pi_{sat}^s(M, \chi_1) \cap \Pi_{sat}^s(M, \chi_2) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{23}\}$$

# Алгоритм проверки моделей для CTL (пример)



$$\psi = Simplify(\varphi) = \neg \mathbf{EX} \neg \underbrace{(\neg \mathbf{E}(\neg q \mathbf{U} (\neg q \& \neg p)) \& \neg \mathbf{EG} \neg q)}_{\chi}$$

$$S = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{23}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \chi) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{23}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \neg \chi) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, \chi) = \{s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \mathbf{EX} \neg \chi) = Pre(M, \Pi_{sat}^s(M, \neg \chi)) = \{s_{22}, s_{23}, s_{31}, s_{32}, s_{33}\}$$

$$\Pi_{sat}^s(M, \psi) = S \setminus \Pi_{sat}^s(M, \mathbf{EX} \neg \chi) = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}\}$$

$$S_0 = \{s_{11}, s_{31}\} \not\subseteq \Pi_{sat}^s(M, \psi)$$

Следовательно,  $M \not\models \varphi$