Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 4

Дедуктивная верификация программ:
аннотированные программы

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Аннотированные программы: определения

Доказательство корректности программ, основанное логике Хоара, можно сделать более наглядным, если “встроить” информацию о применении правил вывода непосредственно в текст программы

Аннотация — это запись вида $\{\varphi\}$, где φ — произвольная формула

Аннотированная программа — это программа, в которой до и после каждой инструкции могут располагаться последовательности аннотаций

Аннотация может расцениваться как

- предусловие инструкции, следующей за аннотацией
- постусловие инструкции, предшествующей аннотации
- составная часть триплета, располагающегося в выводе для исходного триплета

Аннотированные программы: определения

Аннотированная программа $\widetilde{\pi}$ обосновывает истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, если выполняются следующие условия:

1. При удалении всех аннотаций из $\widetilde{\pi}$ получается программа π

2. $\widetilde{\pi}$ начинается с аннотации $\{\varphi\}$
   и оканчивается аннотацией $\{\psi\}$

3. Перед каждой инструкцией и после каждой инструкции в $\widetilde{\pi}$ располагается хотя бы одна аннотация

4. Аннотации перед каждой пустой инструкцией
   и после неё равны:
   $$\{\chi\}\emptyset\{\chi\}$$

Аннотированные программы: определения

Аннотированная программа $\widetilde{\pi}$ обосновывает истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, если выполняются следующие условия:

5. Аннотации перед каждым присваиванием и после него соотносятся так же, как и в правиле $R_{:=}$:
$$\{\chi\{\mathrm{x}/t\}\}\mathrm{x} := t;\{\chi\},$$
где переменная x свободна для терма t в формуле χ

6. Каждое ветвление в $\widetilde{\pi}$ аннотировано следующим образом:
$$\begin{array}{l}\{\chi_1\}\\ \textbf{if } C \textbf{ then}\\ \quad \{\chi_1 \,\&\, C\}\widetilde{\pi}_1\{\chi_2\}\\ \textbf{else}\\ \quad \{\chi_1 \,\&\, \neg C\}\widetilde{\pi}_2\{\chi_2\}\\ \textbf{fi}\\ \{\chi_2\}\end{array}$$

Аннотированные программы: определения

Аннотированная программа $\widetilde{\pi}$ обосновывает истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, если выполняются следующие условия:

7. каждый цикл в $\widetilde{\pi}$ аннотирован следующим образом:

$$\begin{array}{l}\{\chi\}\\ \textbf{while } C \textbf{ do}\\ \quad \{\chi \,\&\, C\}\widetilde{\pi}'\{\chi\}\\ \textbf{od}\\ \{\chi \,\&\, \neg C\}\end{array}$$

8. Для любых двух подряд идущих аннотаций $\{\chi_1\}\{\chi_2\}$ в $\widetilde{\pi}$ верно $\mathcal{I} \models \chi_1 \to \chi_2$

Аннотированные программы: пример

Рассмотрим такую программу π:

$$\textbf{while } \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \textbf{ do if } \mathrm{x} > \mathrm{y} \textbf{ then } \mathrm{x} := \mathrm{x} - \mathrm{y}; \textbf{ else } \mathrm{y} := \mathrm{y} - \mathrm{x}; \textbf{ fi od}$$

Докажем, что программа π корректно реализует вычисление наибольшего общего делителя натуральных значений x и y с записью результата в x

Для этого достаточно доказать истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}_{ar}$, где:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}): &\quad \mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \\
\psi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}): &\quad \mathrm{x} = \mathrm{z} \\
\gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}): &\quad \exists \mathrm{u}\,(\mathrm{z} \times \mathrm{u} = \mathrm{x}) \,\&\, \exists \mathrm{u}\,(\mathrm{z} \times \mathrm{u} = \mathrm{y}) \,\& \\
&\quad \forall \mathrm{w}\,(\exists \mathrm{u}\,(\mathrm{w} \times \mathrm{u} = \mathrm{x}) \,\&\, \exists \mathrm{u}\,(\mathrm{w} \times \mathrm{u} = \mathrm{y}) \to (\mathrm{w} \leq \mathrm{z}))
\end{aligned}$$

Аннотированные программы: пример

Аннотированная программа, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$, может выглядеть так:

Аннотированные программы: пример

Аннотированная программа, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$, может выглядеть так:

$\{\mathrm{x} > \mathbf{0}\,\&\,\mathrm{y} > \mathbf{0}\,\&\,\mathrm{gcd}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\}$
while $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ **do**

if $\mathrm{x} > \mathrm{y}$ **then**

$\mathrm{x} := \mathrm{x} - \mathrm{y};$

else

$\mathrm{y} := \mathrm{y} - \mathrm{x};$

fi

od

$\{\mathrm{x} = \mathrm{z}\}$

Аннотированные программы: пример

Аннотированная программа, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$, может выглядеть так:

$\{\mathrm{x} > \mathbf{0}\,\&\,\mathrm{y} > \mathbf{0}\,\&\,\gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\}$
while $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ **do**
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0}\,\&\,\mathrm{y} > \mathbf{0}\,\&\,\gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\,\&\,\mathrm{x} \neq \mathrm{y}\}$
if $\mathrm{x} > \mathrm{y}$ **then**

$\mathrm{x} := \mathrm{x} - \mathrm{y};$

else

$\mathrm{y} := \mathrm{y} - \mathrm{x};$

fi
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0}\,\&\,\mathrm{y} > \mathbf{0}\,\&\,\gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\}$
od
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0}\,\&\,\mathrm{y} > \mathbf{0}\,\&\,\gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\,\&\,\neg(\mathrm{x} \neq \mathrm{y})\}$
$\{\mathrm{x} = \mathrm{z}\}$

Аннотированные программы: пример

Аннотированная программа, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$, может выглядеть так:

$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\}$
while $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ **do**
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y}\}$
if $\mathrm{x} > \mathrm{y}$ **then**
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{x} > \mathrm{y}\}$

$\mathrm{x} := \mathrm{x} - \mathrm{y};$

else
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \,\&\, \neg(\mathrm{x} > \mathrm{y})\}$

$\mathrm{y} := \mathrm{y} - \mathrm{x};$

fi
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\}$
od
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \neg(\mathrm{x} \neq \mathrm{y})\}$
$\{\mathrm{x} = \mathrm{z}\}$

Аннотированные программы: пример

Аннотированная программа, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$, может выглядеть так:

$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\}$
while $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ **do**
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y}\}$
if $\mathrm{x} > \mathrm{y}$ **then**
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{x} > \mathrm{y}\}$

$\mathrm{x} := \mathrm{x} - \mathrm{y};$
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\}$
else
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \,\&\, \neg(\mathrm{x} > \mathrm{y})\}$

$\mathrm{y} := \mathrm{y} - \mathrm{x};$
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\}$
fi
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\}$
od
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \neg(\mathrm{x} \neq \mathrm{y})\}$
$\{\mathrm{x} = \mathrm{z}\}$

Аннотированные программы: пример

Аннотированная программа, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$, может выглядеть так:

$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\}$
while $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ **do**
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y}\}$
if $\mathrm{x} > \mathrm{y}$ **then**
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{x} > \mathrm{y}\}$
$\{\mathrm{x} - \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x} - \mathrm{y}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\}$
$\mathrm{x} := \mathrm{x} - \mathrm{y};$
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\}$
else
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \,\&\, \neg(\mathrm{x} > \mathrm{y})\}$
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} - \mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y} - \mathrm{x}, \mathrm{z})\}$
$\mathrm{y} := \mathrm{y} - \mathrm{x};$
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\}$
fi
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\}$
od
$\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,\&\, \neg(\mathrm{x} \neq \mathrm{y})\}$
$\{\mathrm{x} = \mathrm{z}\}$

Аннотированные программы: пример

Аннотированная программа, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$, может выглядеть так:

$$
\begin{array}{l}
\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\} \\
\quad \textbf{while } \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \textbf{ do} \\
\quad\quad \{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y}\} \\
\quad\quad \textbf{if } \mathrm{x} > \mathrm{y} \textbf{ then} \\
\quad\quad\quad \{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{x} > \mathrm{y}\} \\
\quad\quad\quad \{\mathrm{x} - \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x} - \mathrm{y},\mathrm{y},\mathrm{z})\} \\
\quad\quad\quad\ \mathrm{x} := \mathrm{x} - \mathrm{y}; \\
\quad\quad\quad \{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\} \\
\quad\quad \textbf{else} \\
\quad\quad\quad \{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \,\&\, \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \,\&\, \neg(\mathrm{x} > \mathrm{y})\} \\
\quad\quad\quad \{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} - \mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x},\mathrm{y} - \mathrm{x},\mathrm{z})\} \\
\quad\quad\quad\ \mathrm{y} := \mathrm{y} - \mathrm{x}; \\
\quad\quad\quad \{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\} \\
\quad\quad \textbf{fi} \\
\quad\quad \{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\} \\
\quad \textbf{od} \\
\{\mathrm{x} > \mathbf{0} \,\&\, \mathrm{y} > \mathbf{0} \,\&\, \gcd(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \,\&\, \neg(\mathrm{x} \neq \mathrm{y})\} \\
\{\mathrm{x} = \mathrm{z}\}
\end{array}
$$

Аннотированные программы и логика Хоара

Теорема (о корректности аннотации программ)
Если существует аннотированная программа $\widetilde{\pi}$, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, то $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Доказательство.

Достаточно показать, как по аннотированной программе $\widetilde{\pi}$ можно построить успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$:

Фрагмент программы $\widetilde{\pi}$ вида

$$\{\chi\}\emptyset\{\chi\}$$

соответствует фрагменту вывода

$$R_{\emptyset}\colon \frac{\{\chi\}\emptyset\{\chi\}}{\mathbb{t}}$$

Аннотированные программы и логика Хоара

Теорема (о корректности аннотации программ)
Если существует аннотированная программа $\widetilde{\pi}$, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, то $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Доказательство.

Достаточно показать, как по аннотированной программе $\widetilde{\pi}$ можно построить успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$:

Фрагмент программы $\widetilde{\pi}$ вида

$$\{\chi\{\mathrm{x}/t\}\}\mathrm{x} := t;\{\chi\}$$

соответствует фрагменту вывода

$$R_{:=}\colon \frac{\{\chi\{\mathrm{x}/t\}\}\mathrm{x} := t;\{\chi\}}{\mathbb{t}}$$

Аннотированные программы и логика Хоара

Теорема (о корректности аннотации программ)
Если существует аннотированная программа $\widetilde{\pi}$, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, то $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Доказательство.

Достаточно показать, как по аннотированной программе $\widetilde{\pi}$ можно построить успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$:

Фрагмент программы $\widetilde{\pi}$ вида

$$\{\chi\}\{\chi'\}\widetilde{\pi}'\{\chi''\}$$

соответствует фрагменту вывода

$$R_{inf}\colon \frac{\{\chi\}\pi'\{\chi''\}}{\chi \to \chi', \{\chi'\}\pi'\{\chi''\}, \chi'' \to \chi''}$$

Аннотированные программы и логика Хоара

Теорема (о корректности аннотации программ)
Если существует аннотированная программа $\widetilde{\pi}$, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, то $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Доказательство.

Достаточно показать, как по аннотированной программе $\widetilde{\pi}$ можно построить успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$:

Фрагмент программы $\widetilde{\pi}$ вида

$$\{\chi\}\widetilde{\pi}'\{\chi'\}\{\chi''\}$$

соответствует фрагменту вывода

$$R_{inf}\colon \frac{\{\chi\}\pi'\{\chi''\}}{\chi \to \chi, \{\chi\}\pi'\{\chi'\}, \chi' \to \chi''}$$

Аннотированные программы и логика Хоара

Теорема (о корректности аннотации программ)
Если существует аннотированная программа $\widetilde{\pi}$, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, то $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Доказательство.

Достаточно показать, как по аннотированной программе $\widetilde{\pi}$ можно построить успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$:

Фрагмент программы $\widetilde{\pi}$ вида

$$\{\chi\}\widetilde{\pi}_1\{\chi'\}\ \widetilde{\pi}_2\{\chi''\}$$

соответствует фрагменту вывода

$$R_{seq}\colon \frac{\{\chi\}\pi_1\ \pi_2\{\chi''\}}{\{\chi\}\pi_1\{\chi'\}, \{\chi'\}\pi_2\{\chi''\}}$$

Аннотированные программы и логика Хоара

Теорема (о корректности аннотации программ)
Если существует аннотированная программа $\widetilde{\pi}$, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, то $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Доказательство.

Достаточно показать, как по аннотированной программе $\widetilde{\pi}$ можно построить успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$:

Фрагмент программы $\widetilde{\pi}$ вида

$$\{\chi\}\textbf{if } C \textbf{ then } \{\chi \,\&\, C\}\widetilde{\pi}_1\{\chi'\} \textbf{ else } \{\chi \,\&\, \neg C\}\widetilde{\pi}_2\{\chi'\} \textbf{ fi}\{\chi'\}$$

соответствует фрагменту вывода

$$R_{\textbf{if}}\colon \frac{\{\chi\}\textbf{if } C \textbf{ then } \pi_1 \textbf{ else } \pi_2 \textbf{ fi}\{\chi'\}}{\{\chi \,\&\, C\}\pi_1\{\chi'\}, \{\chi \,\&\, \neg C\}\pi_2\{\chi'\}}$$

Аннотированные программы и логика Хоара

Теорема (о корректности аннотации программ)
Если существует аннотированная программа $\widetilde{\pi}$, обосновывающая истинность триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ в интерпретации $\mathcal{I}$, то $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Доказательство.

Достаточно показать, как по аннотированной программе $\widetilde{\pi}$ можно построить успешный вывод триплета $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$:

Фрагмент программы $\widetilde{\pi}$ вида

$$\{\chi\}\textbf{while } C \textbf{ do } \{\chi \,\&\, C\}\widetilde{\pi}'\{\chi\} \textbf{ od}\{\chi \,\&\, \neg C\}$$

соответствует фрагменту вывода

$$R_{\textbf{while}}\colon \frac{\{\chi\}\textbf{while } C \textbf{ do } \pi' \textbf{ od}\{\chi \,\&\, \neg C\}}{\{\chi \,\&\, C\}\pi'\{\chi\}}$$