Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 12

Метод семантических таблиц
в логике предикатов:
корректность табличного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

Лемма (о корректности правил табличного вывода в ЛП)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\, T_2)}$**:**

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg,\ L\forall,\ R\forall,\ L\exists,\ R\exists\ —$$

таблица T_0 **выполнима тогда и только тогда,**
когда выполнима таблица T_1 **(или выполнима таблица** T_2**)**

Доказательство. $L\&$, $R\&$, $L\vee$, $R\vee$, $L\to$, $R\to$, $L\neg$, $R\neg$

Доказательство корректности этих правил
почти дословно переносится из доказательства той же леммы
для логики высказываний — достаточно только

- начать с
  «Пусть $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы»
- заменить «существует интерпретация $\mathcal{I}$»
  на «существуют интерпретация $\mathcal{I}$ **и набор предметов** $\widetilde{d}^n$»
- заменить (не)выполнимость формулы в интерпретации $\mathcal{I}$
  на (не)выполнимость ... **на наборе предметов** $\widetilde{d}^n$

Лемма (о корректности правил табличного вывода в ЛП)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\, T_2)}$:

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg,\ L\forall,\ R\forall,\ L\exists,\ R\exists\ -$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\forall$: $\frac{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\ \varphi \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\ \varphi, \varphi\{\mathrm{x}/t\} \mid \Delta\rangle}$

($\Leftarrow$) *очевидно, что* если вычеркнуть «$\varphi\{\mathrm{x}/t\}$» из выполнимой (нижней) таблицы, то она (станет верхней и) останется выполнимой

($\Rightarrow$) пусть верхняя таблица выполнима,

и $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — все свободные переменные формул нижней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$

существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$

При этом $\quad \mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}\ \varphi)[\widetilde{d}^n] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi[t[\widetilde{d}^n], \widetilde{d}^n] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi\{\mathrm{x}/t\}[\widetilde{d}^n]$

Значит, нижняя таблица также выполнима

А где используется **правильность** подстановки $\{\mathrm{x}/t\}$ для φ?

Лемма (о корректности правил табличного вывода в ЛП)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\, T_2)}$**:**

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg,\ L\forall,\ R\forall,\ L\exists,\ R\exists\ —$$

таблица T_0 **выполнима тогда и только тогда,**
когда выполнима таблица T_1 **(или выполнима таблица** T_2**)**

Доказательство. $L\exists$: $\frac{\langle \Gamma, \exists \mathrm{x}\ \varphi \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\rangle}$

($\Leftarrow$) *очевидно*, т.к. если $\mathcal{I} \models \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}[\widetilde{d}^n]$, то $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$

($\Rightarrow$) пусть верхняя таблица выполнима,
и $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$ — а значит, существует предмет d_0, такой что $\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Лемма (о корректности правил табличного вывода в ЛП)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\, T_2)}$:

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg,\ L\forall,\ R\forall,\ L\exists,\ R\exists\ -$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\exists$: $\frac{\langle \Gamma, \exists \mathtt{x}\ \varphi \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\rangle}$

$(\Rightarrow)$ $\quad \psi \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n] \quad \chi \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \psi[\widetilde{d}^n] \quad \mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{J}$,
отличающуюся от $\mathcal{I}$ только оценкой константы $\mathbf{c}$: $\overline{\mathbf{c}} = d_0$

Тогда $\mathcal{J} \models (\varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\})[\widetilde{d}^n]$

Кроме того,

- $\mathcal{J} \models \psi[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{J} \not\models \chi[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ

Значит, нижняя таблица выполнима

А где используется тот факт, что $\mathbf{c}$ — «неиспользованная» константа?

Для правил $R\forall$, $R\exists$ доказательство аналогично ▼

Теорема (о корректности табличного вывода в ЛП)
Если для семантической таблицы T существует успешный табличный вывод, то таблица T невыполнима

Доказательство.
Следует из определения табличного вывода,
леммы корректности правил табличного вывода и
утверждения о невыполнимости закрытых таблиц ▼

Следствие
Если для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод, то $\models \varphi$

А верно ли утверждение в обратную сторону?