Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 33

Натуральное исчисление предикатов:
полнота

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Лемма о сведéнии ГИП к НИП

Любая формула, доказуемая в ГИП, доказуема и в НИП

Доказательство.

По утверждению о совмещении выводов и определению доказательства, достаточно обосновать три факта:

1. Для каждой аксиомы ψ ГИП
   секвенция $\vdash \psi$ доказуема НИП
2. Если формула χ выводится из ψ_1, ψ_2 по правилу R_{mp} в ГИП,
   то секвенция $\vdash \chi$ выводима из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ в НИП
3. Если формула χ выводится из ψ по правилу R_g в ГИП,
   то секвенция $\vdash \chi$ выводима из $\vdash \psi$ в НИП

Лемма о сведе́нии ГИП к НИП

Любая формула, доказуемая в ГИП, доказуема и в НИП

Доказательство.

1. Подробно докажем в НИП только аксиомы ГИП вида

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны):

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B \vdash A \vee B \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, A \vdash A \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, A \vdash A \to C \\
R_{\to}^{-}: & A \to C, B \to C, A \vee B, A \vdash C \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash B \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash B \to C \\
R_{\to}^{-}: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash C \\
R_{\vee}^{-}: & A \to C, B \to C, A \vee B \vdash C \\
R_{\to}^{+}: & A \to C, B \to C \vdash A \vee B \to C \\
R_{\to}^{+}: & A \to C \vdash (B \to C) \to (A \vee B \to C) \\
R_{\to}^{+}: & \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))
\end{array}$$

Лемма о сведéнии ГИП к НИП

Любая формула, доказуемая в ГИП, доказуема и в НИП

Доказательство.

2. Положим, что формула χ выводится из ψ_1 и ψ_2 по правилу R_{mp}

Тогда $\psi_2 = \psi_1 \rightarrow \chi$,
и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ устроен очень просто:

$$\begin{array}{ll} & \vdash \psi_1 \\ & \vdash \psi_1 \rightarrow \chi \\ R^{-}_{\rightarrow}: & \vdash \chi \end{array}$$

3. Положим, что формула χ выводится из ψ по правилу R_g

Тогда $\chi = \forall \mathrm{x}\ \psi$,
и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\vdash \psi$ устроен очень просто:

$$\begin{array}{ll} & \vdash \psi \\ R^{+}_{\forall}: & \vdash \forall \mathrm{x}\ \psi \quad \blacktriangledown \end{array}$$

Теорема о полноте НИП

Любая общезначимая формула ЛП доказуема в НИП

Доказательство.

Рассмотрим произвольную общезначимую формулу φ

По теореме Гёделя о полноте,
существует доказательство формулы φ в ГИП

По лемме о сведе́нии ГИП к НИП,
существует доказательство формулы φ в НИП ▼

Следствие (проверка логического следования в НИП)

Для любого множества предложений Γ и любого предложения φ секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема в НИП тогда и только тогда, когда верно соотношение $\Gamma \models \varphi$

Теорема о полноте НИП

Доказательство (следствия).

$\Gamma \models \varphi$

$\Rightarrow$ (теорема компактности Мальцева)

Существует конечное подмножество $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ множества Γ, такое что $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$

$\Rightarrow$ (теорема о логическом следствии)

$\models \psi_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \psi_n \to \varphi$

$\Rightarrow$ (теорема о равносильной замене и законы булевой алгебры)

$\models \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$

$\Rightarrow$ (полнота исчисления)

Секвенция $\vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$ доказуема в НИП

$\Rightarrow$ (правило монотонности и правило отделения)

Секвенция $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$ доказуема в НИП

$\Rightarrow$ (правило монотонности)

Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство в обратную сторону аналогично ▼