

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 33

Натуральное исчисление предикатов:
полнота

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Лемма о сведении ГИП к НИП

Любая формула, доказуемая в ГИП, доказуема и в НИП

Доказательство.

По утверждению о совмещении выводов и определению доказательства, достаточно обосновать три факта:

1. Для каждой аксиомы ψ ГИП секвенция $\vdash \psi$ доказуема НИП
2. Если формула χ выводится из ψ_1, ψ_2 по правилу R_{mp} в ГИП, то секвенция $\vdash \chi$ выводима из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ в НИП
3. Если формула χ выводится из ψ по правилу R_g в ГИП, то секвенция $\vdash \chi$ выводима из $\vdash \psi$ в НИП

Лемма о сведении ГИП к НИП

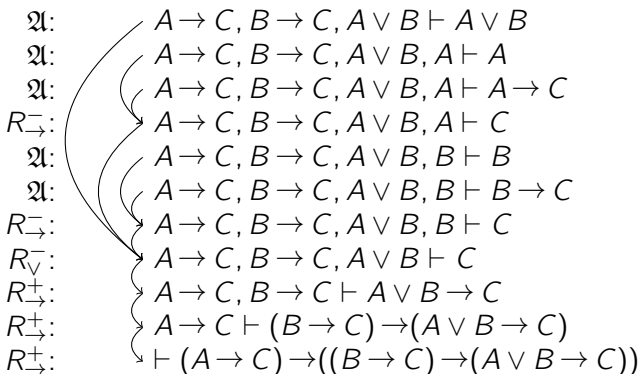
Любая формула, доказуемая в ГИП, доказуема и в НИП

Доказательство.

1. Подробно докажем в НИП только аксиомы ГИП вида

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны):



Лемма о сведении ГИП к НИП

Любая формула, доказуемая в ГИП, доказуема и в НИП

Доказательство.

2. Положим, что формула χ выводится из ψ_1 и ψ_2 по правилу R_{mp}

Тогда $\psi_2 = \psi_1 \rightarrow \chi$,

и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ устроен очень просто:

$$R_{\rightarrow}^-: \quad \begin{array}{l} \vdash \psi_1 \\ \vdash \psi_1 \rightarrow \chi \\ \vdash \chi \end{array}$$

3. Положим, что формула χ выводится из ψ по правилу R_g

Тогда $\chi = \forall x \psi$,

и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\vdash \psi$ устроен очень просто:

$$R_{\forall}^+: \quad \begin{array}{l} \vdash \psi \\ \vdash \forall x \psi \quad \blacktriangledown \end{array}$$

Теорема о полноте НИП

Любая общезначимая формула ЛП доказуема в НИП

Доказательство.

Рассмотрим произвольную общезначимую формулу φ

По теореме Гёделя о полноте,
существует доказательство формулы φ в ГИП

По лемме о сведении ГИП к НИП,
существует доказательство формулы φ в НИП ▼

Следствие (проверка логического следования в НИП)

Для любого множества предложений Γ и любого предложения φ
секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема в НИП тогда и только тогда,
когда верно соотношение $\Gamma \models \varphi$

Теорема о полноте НИП

Доказательство (следствия).

- $\Gamma \models \varphi$
 - \Rightarrow (теорема компактности Мальцева)
- Существует конечное подмножество $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ множества Γ , такое что $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$
 - \Rightarrow (теорема о логическом следствии)
- $\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$
 - \Rightarrow (теорема о равносильной замене и законы булевой алгебры)
- $\models \psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\psi_n \rightarrow \varphi) \dots))$
 - \Rightarrow (полнота исчисления)
- Секвенция $\vdash \psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\psi_n \rightarrow \varphi) \dots))$ доказуема в НИП
 - \Rightarrow (правило монотонности и правило отделения)
- Секвенция $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \vdash \varphi$ доказуема в НИП
 - \Rightarrow (правило монотонности)
- Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство в обратную сторону аналогично ▼