Математическая логика и логическое программирование

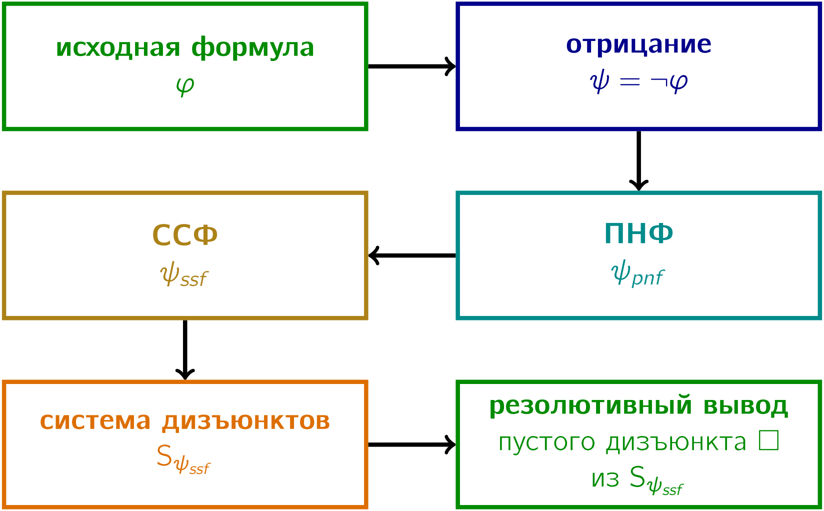
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 22

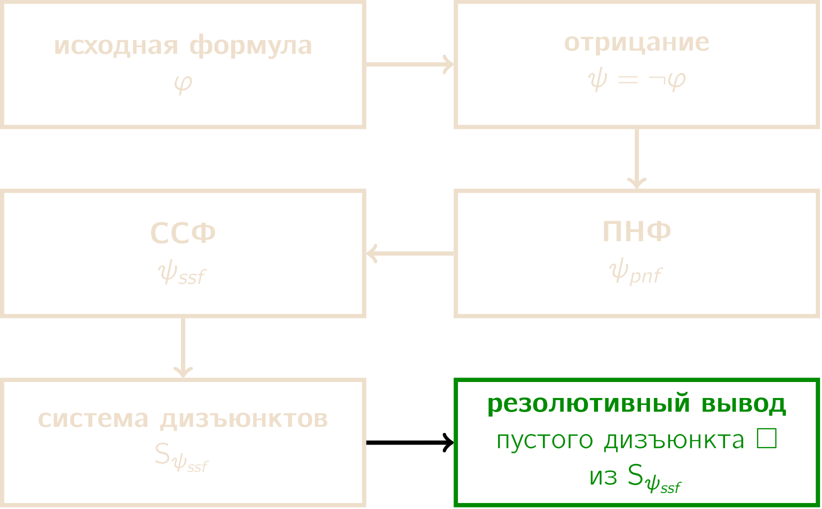
Резолютивный вывод
Корректность резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

Ещё немного определений

Положительная литера — это атом

Отрицательная литера — это отрицание атома

Если E — логическое выражение и θ — подстановка, то:

- $E\theta$ — пример выражения E
- если $\mathrm{Var}_{E\theta} = \emptyset$, то $E\theta$ — основной пример
- если $\theta : \mathrm{Var} \to \mathrm{Var}$ — биекция, то
  - θ — переименование
  - $E\theta$ — вариант выражения E

Ещё немного определений

Пример

Рассмотрим выражение $E = \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathbf{c})$ и подстановки

$$\begin{aligned} \theta &= \{\mathrm{x}/\mathrm{u}, \mathrm{y}/\mathrm{z}, \mathrm{u}/\mathrm{x}, \mathrm{z}/\mathrm{y}\} \\ \eta &= \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathrm{y}/\mathrm{z}\} \\ \mu &= \{\mathrm{z}/\mathbf{c}\} \\ \varepsilon &= \{\} \end{aligned}$$

Тогда:

- подстановки θ и ε — переименования, а η и μ — нет
- $E\eta = \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathrm{z}, \mathbf{c})$ — пример выражения E
- $E\eta\mu = \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathbf{d}), \mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathbf{c}, \mathbf{c})$ — основной пример выражения E
- $E\theta = \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \neg\mathrm{R}(\mathrm{z}, \mathbf{c})$ — вариант выражения E

Правило резолюции

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1,\ D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- D_1, D_2 — дизъюнкты
- L_1, L_2 — положительные литеры
- $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила резолюции
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D_1 \vee D_2)\theta$ — резольвента дизъюнктов $D_1 \vee L_1$, $D_2 \vee \neg L_2$

Литеры L_1, $\neg L_2$ образуют контрарную пару

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$\frac{P(x, \mathbf{f}(y)) \vee \neg R(\mathbf{g}(x, z), \mathbf{f}(z)) \qquad Q(x) \vee R(y, x) \vee \neg P(\mathbf{g}(z, y), z)}{\neg R(\mathbf{g}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(y), y), \mathbf{f}(y)), \mathbf{f}(\mathbf{f}(y))) \vee Q(\mathbf{g}(\mathbf{f}(y), y)) \vee R(y, \mathbf{g}(\mathbf{f}(y), y))}$$

резольвента

$$\theta = \{x/\mathbf{g}(\mathbf{f}(y), y),\ z/\mathbf{f}(y)\} \in \text{НОУ}(P(x, \mathbf{f}(y)), P(\mathbf{g}(z, y), z))$$

резольвента: $(\neg R(\mathbf{g}(x, z), \mathbf{f}(z)) \vee Q(x) \vee R(y, x))\theta$

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \neg \mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})) \qquad \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z})}{\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}), \mathrm{z}))) \vee \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathrm{z})) \vee \neg \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}), \mathrm{z})), \mathrm{z})}$$

резольвента

$$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{z}),\ \mathrm{y}/\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathrm{z}), \mathrm{z})\} \in \text{НОУ}(\mathrm{R}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathrm{z}), \mathbf{f}(\mathrm{z})), \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}))$$

резольвента: $(\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathbf{f}(\mathrm{y})) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{P}(\mathbf{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}), \mathrm{z}))\theta$

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$P(\mathbf{f}(x), y)$ $\qquad$ $\neg P(u, \mathbf{g}(v))$

$$\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\} \in \text{НОУ}(P(\mathbf{f}(x), y), P(u, \mathbf{g}(v)))$$

резольвента: $(???)\theta$

Правило резолюции

Пример

контрарная пара

$$\frac{P(\mathbf{f}(x), y) \qquad\qquad \neg P(u, \mathbf{g}(v))}{\square}$$

резольвента

$$\theta = \{y/\mathbf{g}(v), u/\mathbf{f}(x)\} \in \text{НОУ}(P(\mathbf{f}(x), y), P(u, \mathbf{g}(v)))$$

резольвента: (пустое мультимножество литер)θ

Правило резолюции

Лемма (о корректности правила резолюции)

Если D **— резольвента дизъюнктов** D_1**,** D_2**, то** $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \models \mathsf{D}$

Доказательство (кванторные приставки опущены)

Пусть $\mathsf{D}_1 = \mathsf{D}_1' \vee \mathsf{L}_1$, $\mathsf{D}_2 = \mathsf{D}_2' \vee \neg \mathsf{L}_2$, $\theta \in \text{НОУ}(\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2)$,
$\mathsf{D} = (\mathsf{D}_1' \vee \mathsf{D}_2')\theta$ и $\mathsf{L}_1\theta = \mathsf{L}_2\theta = \mathsf{L}$

Тогда по свойствам отношения $\models$ и операции $\vee$ верно следующее:

$$
\begin{array}{llll}
\mathsf{D}_1 & \models \mathsf{D}_1\theta & \mathsf{D}_2 & \models \mathsf{D}_2\theta \\
\mathsf{D}_1 & \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{L}_1\theta & \mathsf{D}_2 & \models \mathsf{D}_2'\theta \vee \neg \mathsf{L}_2\theta \\
\mathsf{D}_1 & \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{L} & \mathsf{D}_2 & \models \mathsf{D}_2'\theta \vee \neg \mathsf{L} \\
\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 & \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{L} & \mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 & \models \mathsf{D}_2'\theta \vee \neg \mathsf{L} \\
\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 & \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{D}_2'\theta \vee \mathsf{L} & \mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 & \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{D}_2'\theta \vee \neg \mathsf{L}
\end{array}
$$

Заметим, что если $\Gamma \models A \vee B$ и $\Gamma \models A \vee \neg B$, то $\Gamma \models A$ (очевидно?)

Тогда $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \models \mathsf{D}_1'\theta \vee \mathsf{D}_2'\theta$

То есть $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \models \mathsf{D}$ ▼

Правило склейки

Применение одного только правила резолюции далеко не всегда позволяет вывести $\square$ из невыполнимой системы

Например:

$$P(x) \vee P(\mathbf{c})$$
$$\neg P(\mathbf{c}) \vee \neg P(y)$$

Система из таких двух дизъюнктов невыполнима, но все резольвенты, резольвенты резольвент и т.д. этих дизъюнктов имеют ровно две литеры

Необходимо иметь правило, которое позволит получать $\square$ и из таких систем

Правило склейки

Правило склейки

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

Здесь

- D — дизъюнкт
- L_1, L_2 — литеры
- $\theta \in НОУ(L_1, L_2)$

При использовании правила склейки
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D \vee L_1)\theta$ — склейка дизъюнкта $D \vee L_1 \vee L_2$

Литеры L_1, L_2 образуют склеиваемую пару

Правило склейки

Пример

склеиваемая пара

$$\frac{P(x) \quad \lor \quad \neg R(y, z, \mathbf{f}(x)) \quad \lor \quad \neg R(x, \mathbf{f}(\mathbf{c}), z)}{P(\mathbf{c}) \lor \neg R(\mathbf{c}, \mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathbf{f}(\mathbf{c}))}$$

склейка

$$\theta = \{x/\mathbf{c}, y/\mathbf{c}, z/\mathbf{f}(\mathbf{c})\} \in \text{НОУ}(\neg R(y, z, \mathbf{f}(x)), \neg R(x, \mathbf{f}(\mathbf{c}), z))$$

склейка: $(P(x) \lor \neg R(y, z, \mathbf{f}(x)))\theta$

Лемма (о корректности правила склейки)

Если D **— склейка дизъюнкта** D_1**, то** $D_1 \models D$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы о корректности правила резолюции

Резолютивный вывод

Пусть S — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из S — это
конечная последовательность дизъюнктов

$$D_1, \ldots, D_i, \ldots, D_k,$$

такая что каждый дизъюнкт D_i является

- вариантом дизъюнкта из S,
- склейкой дизъюнкта D_j, где $j < i$, или
- резольвентой дизъюнктов D_j, D_m, где $j < i$ и $m < i$

Дизъюнкт резолютивно выводи́м из S, если существует
резолютивный вывод из S, оканчивающийся этим дизъюнктом

Резолютивный вывод

Пример

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{P}(\mathrm{x}) \\ \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})) \\ \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод $\square$ из S:

$$\begin{array}{rl} \text{вариант} & \mathrm{P}(\mathrm{x}_1) \\ \text{вариант} & \neg\mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)) \vee \mathrm{R}(\mathrm{x}_2, \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)) \\ \text{резольвента} & \mathrm{R}(\mathrm{x}_3, \mathbf{g}(\mathrm{x}_3)) \\ \text{вариант} & \neg\mathrm{R}(\mathrm{x}_4, \mathrm{u}_4) \\ \text{резольвента} & \square \end{array}$$

Следовательно, $\square$ резолютивно выводи́м из системы S

Резолютивный вывод

Другой пример

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \neg P(\mathbf{f}(x), z) \vee \neg P(y, y) \\ P(x, \mathbf{f}(y)) \vee R(y) \\ \neg R(y) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод $\square$ из S:

вариант	$P(x_1, \mathbf{f}(y_1)) \vee R(y_1)$
вариант	$\neg R(y_2)$
резольвента	$P(x_3, \mathbf{f}(y_3))$
вариант	$\neg P(\mathbf{f}(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$
склейка	$\neg P(\mathbf{f}(x_5), \mathbf{f}(x_5))$
резольвента	$\square$

Резолютивный вывод

Возможность использования всевозможных вариантов дизъюнктов наряду с самими дизъюнктами в резолютивном выводе настолько же важна, насколько и возможность использования резольвент и склеек

Например: $S = \{\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))\}$

$\text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))) = \emptyset$

Значит, у этих дизъюнктов нет ни одной резольвенты

При этом система S невыполнима:

у формул $\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{x})$ и $\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}))$ нет общих моделей

К вариантам дизъюнктов из S применимо правило резолюции:

$$\{\mathrm{x}_1/\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)\} \in \text{НОУ}(\mathrm{P}(\mathrm{x}_1), \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{x}_2)))$$

Корректность использования всевозможных вариантов дизъюнктов обеспечивается следующей равносильностью:

$$\forall \mathrm{x}\ \varphi \sim \forall \mathrm{y}\ (\varphi\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}),\ \text{если} < \ldots >$$

Резолютивный вывод

Резолютивный вывод успешен,
если он оканчивается пустым дизъюнктом ($\square$)

Успешный резолютивный вывод также называется
резолютивным опровержением:

- предположим, что
  исходная система дизъюнктов выполнима
- тогда система, к которой добавлены все дизъюнкты вывода,
  также выполнима (*это обосновывается дальше*)
- **противоречие:** среди добавленных дизъюнктов
  есть тождественно ложный ($\square$), а значит,
  расширенная система дизъюнктов невыполнима
- полученное противоречие
  опровергает выполнимость исходной системы
  (*доказывает невыполнимость методом «от противного»*)

Корректность резолютивного вывода

Теорема (о корректности резолютивного вывода)
**Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводи́м $\square$,
то система S невыполнима**

Доказательство.

Вариант D' любого дизъюнкта D равносилен D, а значит, $\mathrm{D} \models \mathrm{D}'$

По корректности правила резолюции:
если D'' — *резольвента* дизъюнктов D_1, D_2, то $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \models \mathrm{D}''$

По корректности правила склейки:
если D''' — *склейка* дизъюнкта D_3, то $\mathrm{D}_3 \models \mathrm{D}'''$

Значит, по транзитивности логического следования,
любой дизъюнкт, выводимый из S,
является логическим следствием S, и в частности, $S \models \square$

При этом дизъюнкт $\square$ не имеет ни одной модели,
а значит, и система S не имеет ни одной модели ▼