

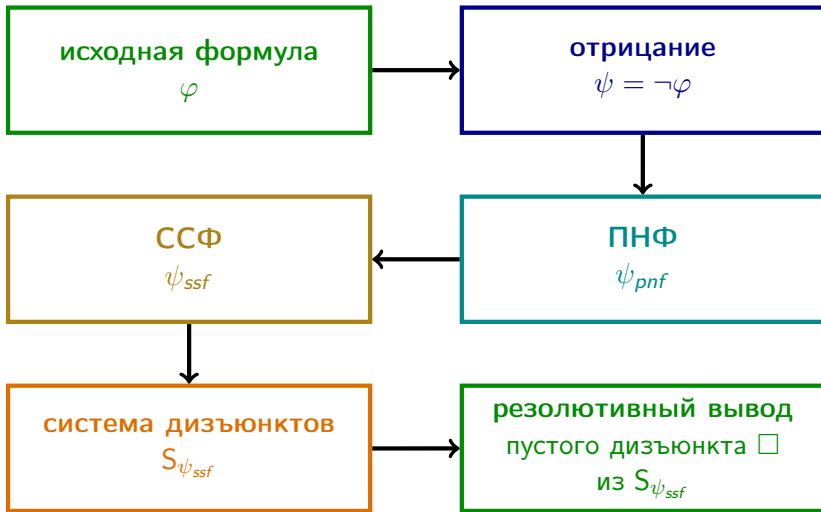
# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

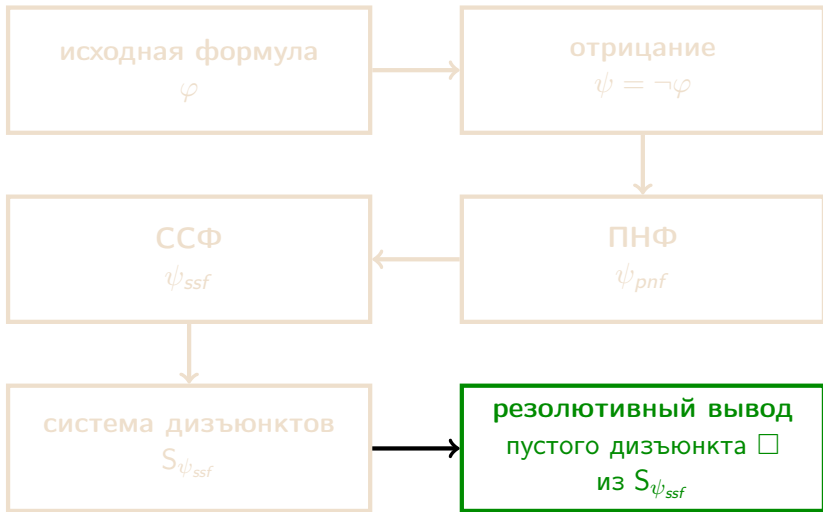
## Блок 22

Резолютивный вывод  
Корректность резолютивного вывода

Лектор:  
Подымов Владислав Васильевич  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

# Ещё немного определений

Положительная литера — это атом

Отрицательная литера — это отрицание атома

Если  $E$  — логическое выражение и  $\theta$  — подстановка, то:

- ▶  $E\theta$  — пример выражения  $E$
- ▶ если  $\text{Var}_{E\theta} = \emptyset$ , то  $E\theta$  — основной пример
- ▶ если  $\theta : \text{Var} \rightarrow \text{Var}$  — биекция, то
  - ▶  $\theta$  — переименование
  - ▶  $E\theta$  — вариант выражения  $E$

# Ещё немного определений

## Пример

Рассмотрим выражение  $E = P(x, f(y)) \vee \neg R(y, c)$  и подстановки

$$\theta = \{x/u, y/z, u/x, z/y\}$$

$$\eta = \{x/g(d), y/z\}$$

$$\mu = \{z/c\}$$

$$\varepsilon = \{\}$$

Тогда:

- ▶  $E\eta = P(g(d), f(z)) \vee \neg R(z, c)$  — пример выражения  $E$
- ▶  $E\eta\mu = P(g(d), f(c)) \vee \neg R(c, c)$  — основной пример выражения  $E$
- ▶ подстановки  $\theta$  и  $\varepsilon$  — переименования
- ▶  $E\theta = P(u, f(z)) \vee \neg R(z, c)$  — вариант выражения  $E$

# Правило резолюции

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1, D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- ▶  $D_1, D_2$  — дизъюнкты
- ▶  $L_1, L_2$  — положительные литеры
- ▶  $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

При использовании правила резолюции допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт  $(D_1 \vee D_2)\theta$  — **резольвента** дизъюнктов  $D_1 \vee L_1, D_2 \vee \neg L_2$

Литеры  $L_1, \neg L_2$  образуют **контрарную пару**

# Правило резолюции

## Пример

контрарная пара

$$P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$Q(x) \vee R(y, x) \vee \neg P(g(z, y), z)$$

---

$$\neg R(g(g(f(y), y), f(y)), f(f(y))) \vee Q(g(f(y), y)) \vee R(y, g(f(y), y))$$

резольвента

$$\theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\} \in \text{НОУ}(P(x, f(y)), P(g(z, y), z))$$

резольвента:  $(\neg R(g(x, z), f(z)) \vee Q(x) \vee R(y, x))\theta$

# Правило резолюции

## Пример

контрарная пара

$$P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$Q(x) \vee R(y, x) \vee \neg P(g(z, y), z)$$

---

$$P(f(z), f(g(f(z), z))) \vee Q(f(z)) \vee \neg P(g(z, g(f(z), z)), z)$$

резольвента

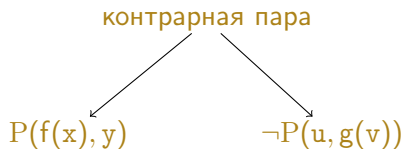
$$\theta = \{x/f(z), y/g(f(z), z)\} \in \text{НОУ}(R(g(x, z), f(z)), R(y, x))$$

резольвента:  $(P(x, f(y)) \vee Q(x) \vee \neg P(g(z, y), z))\theta$



# Правило резолюции

## Пример

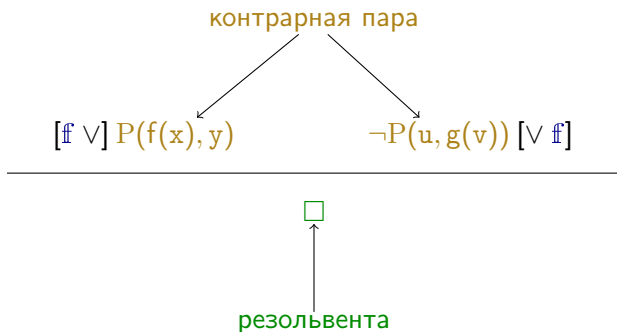


$$\theta = \{y/g(v), u/f(x)\} \in \text{НОУ}(P(f(x), y), P(u, g(v)))$$

резольвента:  $(???)\theta$

# Правило резолюции

## Пример



$$\theta = \{y/g(v), u/f(x)\} \in \text{НОУ}(P(f(x), y), P(u, g(v)))$$

резольвента:  $(f \vee f)\theta$

# Правило резолюции

## Лемма (о корректности правила резолюции)

Если  $D$  — резольвента дизъюнктов  $D_1, D_2$ , то  $D_1, D_2 \models D$

Доказательство

(кванторные приставки опущены)

Пусть  $D_1 = D'_1 \vee L_1$ ,  $D_2 = D'_2 \vee \neg L_2$ ,  $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$ ,  
 $D = (D'_1 \vee D'_2)\theta$  и  $L_1\theta = L_2\theta = L$

Тогда верно следующее:

$$\begin{array}{ll} D_1 \models D_1\theta & D_2 \models D_2\theta \\ D_1 \models D'_1\theta \vee L_1\theta & D_2 \models D'_2\theta \vee \neg L_2\theta \\ D_1 \models D'_1\theta \vee L & D_2 \models D'_2\theta \vee \neg L \\ D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee L & D_1, D_2 \models D'_2\theta \vee \neg L \\ D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee D'_2\theta \vee L & D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee D'_2\theta \vee \neg L \end{array}$$

Заметим, что если  $\Gamma \models A \vee B$  и  $\Gamma \models A \vee \neg B$ , то  $\Gamma \models A$  (очевидно?)

Тогда  $D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee D'_2\theta$

То есть  $D_1, D_2 \models D \blacktriangledown$

# Правило склейки

Применение одного только правила резолюции далеко не всегда позволяет вывести  $\square$  из невыполнимой системы

Например:

$$\begin{aligned} P(x) \vee P(c) \\ \neg P(c) \vee \neg P(y) \end{aligned}$$

Система из таких двух дизъюнктов **невыполнима**, но все резольвенты, резольвенты резольвент, ... этих дизъюнктов имеют **ровно две литеры**

Необходимо иметь правило, которое позволит получать  $\square$  и из таких систем

# Правило склейки

## Правило склейки

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

Здесь

- ▶  $D$  — дизъюнкт
- ▶  $L_1, L_2$  — литеры
- ▶  $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$

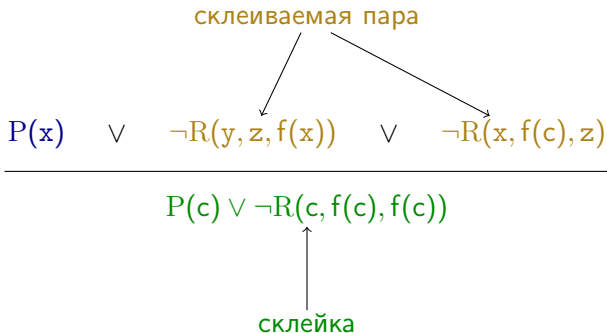
При использовании правила склейки  
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт  $(D \vee L_1)\theta$  — **склейка** дизъюнкта  $D \vee L_1 \vee L_2$

Литеры  $L_1, L_2$  образуют **склеиваемую пару**

# Правило склейки

## Пример



$$\theta = \{x/c, y/c, z/f(c)\} \in \text{НОУ}(\neg R(y, z, f(x)), \neg R(x, f(c), z))$$

$$\text{склейка: } (P(x) \vee \neg R(y, z, f(x)))\theta$$

## Лемма (о корректности правила склейки)

Если  $D$  — склейка дизъюнкта  $D_1$ , то  $D_1 \models D$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы о корректности правила резолюции

# Резолютивный вывод

Пусть  $S$  — система дизъюнктов

**Резолютивный вывод** из  $S$  — это конечная последовательность дизъюнктов

$$D_1, \dots, D_i, \dots, D_k,$$

такая что каждый дизъюнкт  $D_i$  является

- ▶ **вариантом** дизъюнкта из  $S$ ,
- ▶ **склежкой** дизъюнкта  $D_j$ , где  $j < i$ , или
- ▶ **резольвентой** дизъюнктов  $D_j, D_m$ , где  $j < i$  и  $m < i$

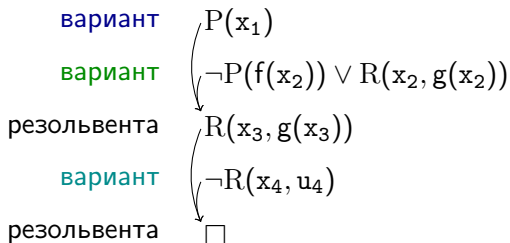
Дизъюнкт **резолютивно выводим** из  $S$ , если существует резолютивный вывод из  $S$ , оканчивающийся этим дизъюнктом

# Резолютивный вывод

## Пример

$$S = \left\{ \begin{array}{l} P(x) \\ \neg P(f(x)) \vee R(x, g(x)) \\ \neg R(x, u) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод  $\square$  из  $S$ :



Следовательно,  $\square$  резолютивно выводим из системы  $S$



# Резолютивный вывод

## Другой пример

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \neg P(f(x), z) \vee \neg P(y, y) \\ P(x, f(y)) \vee R(y) \\ \neg R(y) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод  $\square$  из  $S$ :



## Резолютивный вывод

Возможность использования всевозможных **вариантов** дизъюнктов наряду с самими дизъюнктами в резолютивном выводе настолько же важна, насколько и возможность использования резольвент и склеек

**Например:**  $S = \{\neg P(x), P(f(x))\}$

$\text{НОУ}(P(x), P(f(x))) = \emptyset$

Значит, у этих дизъюнктов нет ни одной резольвенты

При этом система  $S$  невыполнима:

у формул  $\forall x \neg P(x)$  и  $\forall x P(f(x))$  нет **общих моделей**

К **вариантам** дизъюнктов из  $S$  применимо правило резолюции:

$\{x_1/f(x_2)\} \in \text{НОУ}(P(x_1), P(f(x_2)))$

Корректность использования всевозможных вариантов дизъюнктов обеспечивается следующей равносильностью:

$\forall x \varphi \sim \forall y (\varphi\{x/y\})$ , если  $\langle \dots \rangle$

# Резолютивный вывод

Резолютивный вывод **успешен**,  
если он оканчивается пустым дизъюнктом ( $\square$ )

Успешный резолютивный вывод также называется  
**резолютивным опровержением**:

- ▶ предположим, что  
исходная система дизъюнктов выполнима
- ▶ тогда система, к которой добавлены все дизъюнкты вывода,  
также выполнима (*это обосновывается дальше*)
- ▶ **противоречие**: среди добавленных дизъюнктов  
есть тождественно ложный ( $\square$ ), а значит,  
расширенная система дизъюнктов невыполнима
- ▶ полученное противоречие  
**опровергает** выполнимость исходной системы  
(*доказывает невыполнимость методом «от противного»*)

# Корректность резольтивного вывода

## Теорема (о корректности резольтивного вывода)

Если из системы дизъюнктов  $S$  резольтивно выводим  $\square$ , то система  $S$  невыполнима

Доказательство.

*Вариант*  $D'$  любого дизъюнкта  $D$  равносильна  $D$ , а значит,  $D \models D'$

По корректности правила резолюции:

если  $D''$  — *резольвента* дизъюнктов  $D_1, D_2$ , то  $D_1, D_2 \models D''$

По корректности правила склейки:

если  $D'''$  — *склейка* дизъюнкта  $D_3$ , то  $D_3 \models D'''$

Значит, по транзитивности логического следования,

любой дизъюнкт, выводимый из  $S$ ,

является логическим следствием  $S$ , и в частности,  $S \models \square$

При этом дизъюнкт  $\square$  не имеет ни одной модели,

а значит, и система  $S$  не имеет ни одной модели ▼