Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

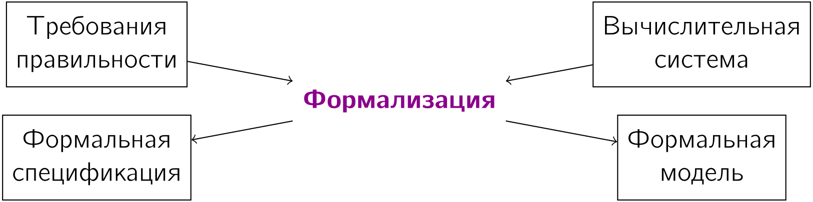
Блок 11

Свойства трасс
Безопасность и живость

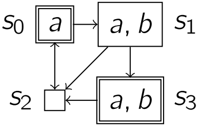
Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Напоминание



Модель Крипке M над множеством атомарных высказываний $\{a, b\}$:



Вычисление τ модели M (бесконечный начальный путь):

$$s_3 \to s_2 \to s_0 \to s_2 \to s_0 \to s_1 \to s_3 \to s_2 \to \dots$$

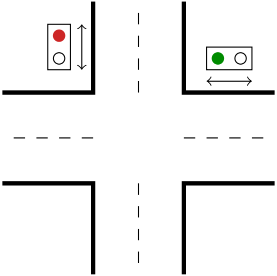
Трасса вычисления τ:

$$\{a, b\}, \emptyset, \{a\}, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b\}, \emptyset, \dots$$

Перейдём к тому, как могут быть устроены формальные спецификации моделей Крипке и соответствующие требования, предъявляемые к вычислительным системам

Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

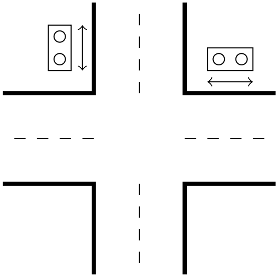


Пример вычисления этой системы:

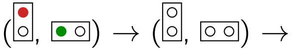
(, ) $\rightarrow$

Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

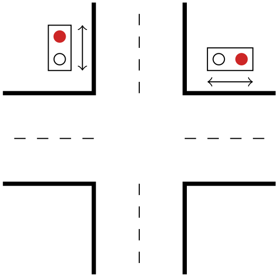


Пример вычисления этой системы:

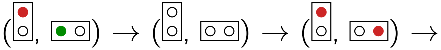


Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

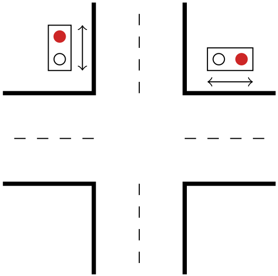


Пример вычисления этой системы:

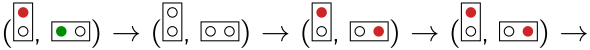


Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

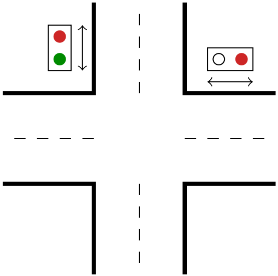


Пример вычисления этой системы:

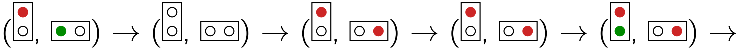


Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

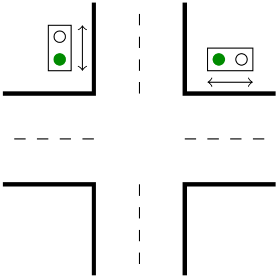


Пример вычисления этой системы:



Свойства трасс

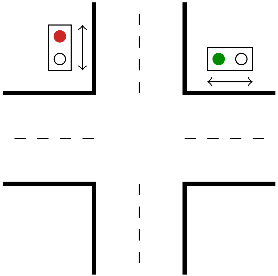
Пример: перекрёсток со светофорами



Пример вычисления этой системы:

Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

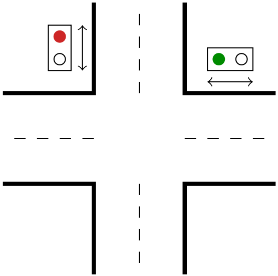


Какие требования было бы разумно предъявить к этой системе:

- Никакой светофор никогда не может быть • и • одновременно
- Сколько бы ни выполнялась система,
  каждый светофор рано или поздно ещё хотя бы раз станет •
- Никогда светофоры не будут • одновременно
- Каждый светофор бесконечно часто бывает и •, и •

Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами



Модель Крипке, составленную с учётом этих требований, разумно строить над такими атомарными высказываниями:

- $r_{\updownarrow}$: светофор $\updownarrow$ красный
- $g_{\updownarrow}$: светофор $\updownarrow$ зелёный
- $r_{\leftrightarrow}$: светофор $\leftrightarrow$ красный
- $g_{\leftrightarrow}$: светофор $\leftrightarrow$ зелёный

Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

Тогда трасса вычисления

устроена так:

$$\{r_{\updownarrow}, g_{\leftrightarrow}\}, \quad \emptyset, \quad \{r_{\updownarrow}, r_{\leftrightarrow}\}, \quad \{r_{\updownarrow}, r_{\leftrightarrow}\}, \quad \{r_{\updownarrow}, g_{\updownarrow}, r_{\leftrightarrow}\}, \quad \{g_{\updownarrow}, g_{\leftrightarrow}\}, \quad \ldots$$

Свойством трасс будем называть любое множество трасс

Будем говорить, что трасса τ обладает свойством P, если $\tau \in P$

Например, требование «Никогда светофоры не будут ● одновременно» отвечает свойству

$$\{\tau \mid \tau \in (2^{\mathrm{AP}})^{\omega}, \quad \forall \sigma \in \tau : \{g_{\leftrightarrow}, g_{\updownarrow}\} \not\subseteq \sigma\},$$

и трасса, изображённая выше, не обладает этим свойством

Свойства трасс

Для модели Крипке $M = (S, S_0, \to, L)$ над AP и её состояния s будем использовать такие понятия и обозначения:

- $\Pi(M, s)$ — множество всех бесконечных путей в M, исходящих из s
- $\Pi(M)$ — множество всех вычислений M
  - То есть $\Pi(M) = \bigcup\limits_{s_0 \in S_0} \Pi(M, s_0)$
- $\mathrm{Tr}(M, s)$ — множество всех трасс путей из $\Pi(M, s)$
- $\mathrm{Tr}(M)$ — множество всех трасс вычислений из $\Pi(M)$
  - То есть $\mathrm{Tr}(M) = \bigcup\limits_{s_0 \in S_0} \mathrm{Tr}(M, s_0)$
- Tr — множество всех трасс (для заданного множества AP)
- Tr_f — множество всех конечных трасс
- M удовлетворяет свойству трасс P ($M \models P$), если $\mathrm{Tr}(M) \subseteq P$

Свойства трасс

Пояснение соотношения $M \models P$
для модели Крипке M и свойства трасс P:

- Всевозможные трассы делятся свойством P на
  хорошие (обладающие свойством P) и
  плохие (не обладающие свойством P)
- Соотношение $M \models P$ означает, что все трассы модели M хорошие
  (т.е. что в модели M нет ни одной плохой трассы)

Утверждение

Для любых моделей Крипке M, M' и свойства трасс P верно:
если $\mathrm{Tr}(M) \subseteq \mathrm{Tr}(M')$ и $M' \models P$, то $M \models P$

Доказательство. Очевидным образом следует из определений
и из свойства транзитивности включения множеств

Свойства безопасности и живости

При анализе поведения систем
зачастую рассматриваются свойства трасс двух классов:

- Свойства безопасности
  - Safety properties
- Свойства живости
  - Или, по-другому, — свойства живучести
  - Liveness properties

Свойства безопасности и живости

Свойство трасс P называется свойством безопасности,
если у любой трассы τ, не обладающей этим свойством,
существует конечный префикс,
любое бесконечное продолжение которого не обладает этим свойством

$$(\forall \tau \in \mathrm{Tr} \setminus P : \exists \tau_1 \in \mathrm{Tr}_f : \exists \tau_2 \in \mathrm{Tr} : \tau = \tau_1 \tau_2 \text{ и } \forall \tau_3 \in \mathrm{Tr} : \tau_1 \tau_3 \notin P)$$

Пояснение

Трассы, обладающие свойством P, считаются безопасными,
а не обладающие — опасными

При этом понятие (без)опасности подобрано так, что если трасса

$$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \sigma_3 \to \dots$$

опасна, то существует обозримая (конечная) совокупность событий

$$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \sigma_3 \to \dots \to \sigma_n,$$

от начала работы системы до некоторого (конечного) момента времени,
по которой и все другие трассы можно признать опасными

То есть опасность, однажды наступив,
не может быть устранена дальнейшими событиями

Свойства безопасности и живости

Примеры требований, отвечающих свойствам безопасности:

- Два процесса не обратятся одновременно к одной ячейке памяти
  - *Опасность*: сейчас два процесса обращаются к одной ячейке
- Пока принтер не завершит печать,
  он не доступен для других устройств
  - *Опасность*: сейчас принтер занят печатью для одного устройства
    и при этом доступен для другого
- Команда выполняется процессором не более трёх тактов подряд
  - *Опасность*: команда выполняется четыре последних такта
- Красный свет загорается только после жёлтого
  - *Опасность*:
    раньше жёлтый свет не загорался, а сейчас горит красный

Свойства безопасности и живости

Свойство трасс P называется свойством живости,
если для любой конечной трассы
существует бесконечное продолжение, обладающее этим свойством

$$(\forall \tau_1 \in \mathrm{Tr}_f : \exists \tau_2 \in \mathrm{Tr} : \tau_1\tau_2 \in P)$$

Пояснение

Определение живости можно прочитать так:
как бы ни работала система, обязательно есть возможность ей выполняться дальше так, чтобы она была признана живой (не сломавшейся, не зависшей, не отключившейся, ...)

Способ продолжения произвольной трассы до входящей в P — это способ подтверждения живости, не зависящий от истории событий до текущего момента и задающийся в терминах как конечного, так и бесконечного продолжения работы системы

Мёртвая в этом смысле система — это такая, которая после выполнения некоторых действий оказалась неспособной ни при каких обстоятельствах подтвердить свою живость

Свойства безопасности и живости

Примеры требований, отвечающих свойствам живости:

- Рано или поздно загорится зелёный свет
  - *Мёртвая система* больше не может зажечь зелёный свет
- После завершения печати принтер стирает содержимое буфера
  - *Мёртвая система* ни при каких условиях не опустошит буфер
- Рано или поздно наступит следующий такт работы процессора
  - *Мёртвая система* потеряла возможность осциллировать тактовым сигналом
- Процесс бесконечно часто обращается к заданной ячейке памяти
  - *Мёртвая система* может обратиться к ячейке памяти лишь конечное число раз

Свойства безопасности и живости

Утверждение. **Если свойство трасс P является и свойством безопасности, и свойством живости, то $P = \mathsf{Tr}$**

Доказательство.

$\boxed{\text{Можете попробовать самостоятельно, это не очень трудно}}$

Утверждение. **Для любого свойства трасс P существуют такие свойство безопасности P_s и свойство живости P_ℓ, для которых верно $P = P_s \cap P_\ell$**

Доказательство.

$\boxed{\text{Можете попробовать самостоятельно (и это может быть трудно)}}$

Свойства безопасности и живости

Пример

Процесс при запуске открывает файл
и затем бесконечно часто обращается к этом файлу

Это не свойство безопасности: если файл открыт при запуске, то для этого случая невозможно подобрать подходящее понятие опасности

Это не свойство живости: если файл не открыт при запуске, то позже невозможно сделать его «открытым при запуске»

Но это пересечение свойства безопасности

Процесс при запуске открывает файл

и свойства живости

Процесс бесконечно часто обращается к файлу