

# Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математические методы верификации схем и программ

## Блок 11

Свойства трасс  
Безопасность и живость

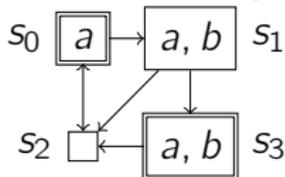
Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

# Напоминание



Модель Крипке  $M$  над множеством атомарных высказываний  $\{a, b\}$ :



Вычисление  $\tau$  модели  $M$  (бесконечный начальный путь):

$$s_3 \rightarrow s_2 \rightarrow s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_3 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$$

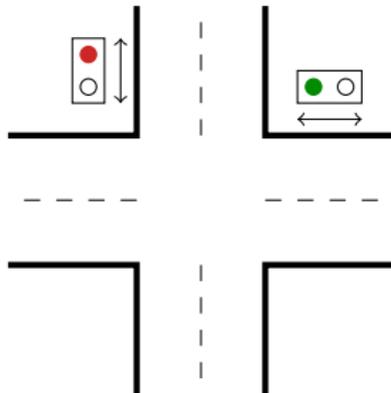
Трасса вычисления  $\tau$ :

$$\{a, b\}, \emptyset, \{a\}, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b\}, \emptyset, \dots$$

Перейдём к тому, как могут быть устроены формальные спецификации моделей Крипке и соответствующие требования, предъявляемые к вычислительным системам

# Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

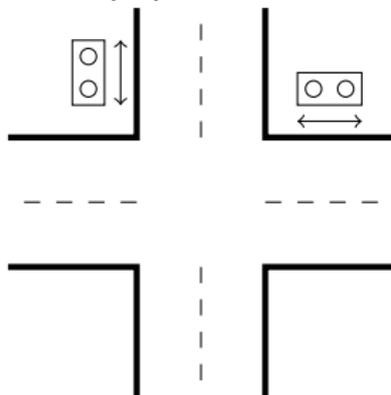


Пример вычисления этой системы:



# Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

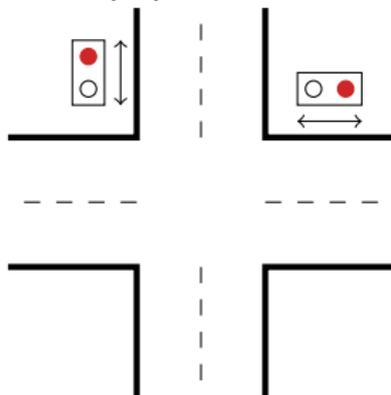


Пример вычисления этой системы:

$$\left( \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \circ \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \circ \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{|c|} \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \end{array} \right) \rightarrow$$

# Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

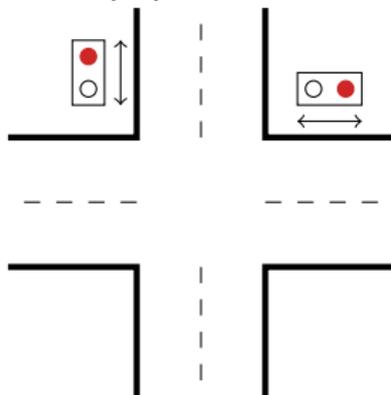


Пример вычисления этой системы:

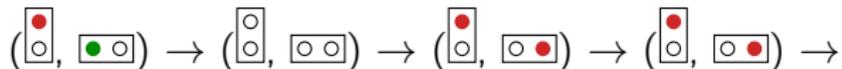


# Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

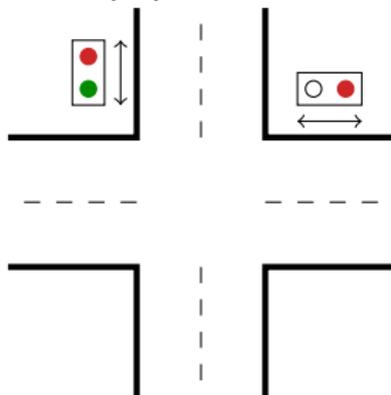


Пример вычисления этой системы:



# Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

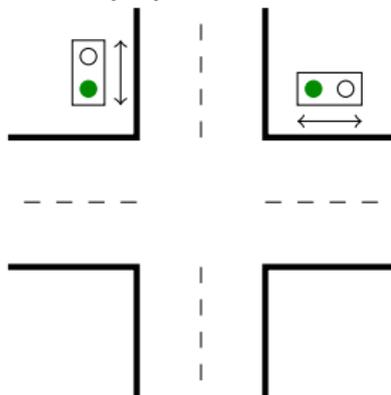


Пример вычисления этой системы:



# Свойства трасс

Пример: перекрёсток со светофорами

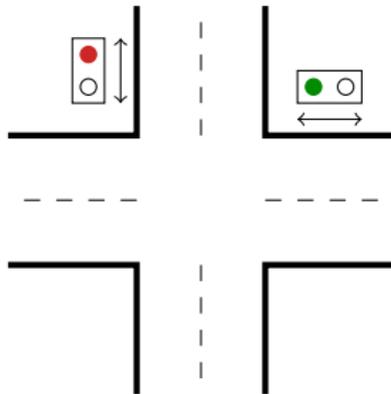


Пример вычисления этой системы:



# Свойства трасс

**Пример:** перекрёсток со светофорами

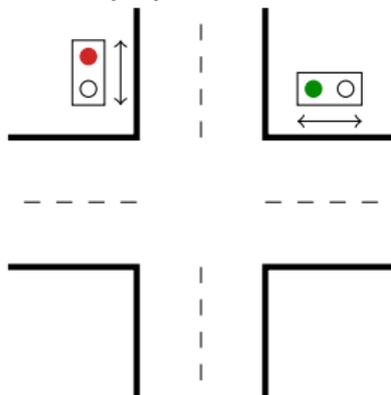


Какие **требования** было бы разумно предъявить к этой системе:

- ▶ Никакой светофор никогда не может быть **●** и **●** одновременно
- ▶ Сколько бы ни выполнялась система, каждый светофор рано или поздно ещё хотя бы раз станет **●**
- ▶ Никогда светофоры не будут **●** одновременно
- ▶ Каждый светофор бесконечно часто бывает и **●**, и **●**

# Свойства трасс

**Пример:** перекрёсток со светофорами



Модель Крипке, составленную с учётом этих требований, разумно строить над такими атомарными высказываниями:

- ▶  $r_{\updownarrow}$ : светофор  $\updownarrow$  красный
- ▶  $g_{\updownarrow}$ : светофор  $\updownarrow$  зелёный
- ▶  $r_{\leftrightarrow}$ : светофор  $\leftrightarrow$  красный
- ▶  $g_{\leftrightarrow}$ : светофор  $\leftrightarrow$  зелёный

# Свойства трасс

**Пример:** перекрёсток со светофорами

Тогда трасса вычисления



устроена так:

$$\{r_{\downarrow}, g_{\leftrightarrow}\}, \quad \emptyset, \quad \{r_{\downarrow}, r_{\leftrightarrow}\}, \quad \{r_{\downarrow}, r_{\leftrightarrow}\}, \quad \{r_{\downarrow}, g_{\uparrow}, r_{\leftrightarrow}\}, \quad \{g_{\uparrow}, g_{\leftrightarrow}\}, \quad \dots$$

**Свойством трасс** будем называть любое множество трасс

Будем говорить, что трасса  $\tau$  **обладает свойством**  $P$ , если  $\tau \in P$

**Например,** требование «Никогда светофоры не будут  $\bullet$  одновременно» отвечает свойству

$$\{\tau \mid \tau \in (2^{AP})^\omega, \quad \forall \sigma \in \tau : \{g_{\leftrightarrow}, g_{\uparrow}\} \not\subseteq \sigma\},$$

и трасса, изображённая выше, не обладает этим свойством

## Свойства трасс

Для модели Крипке  $M = (S, S_0, \rightarrow, L)$  над AP и её состояния  $s$  будем использовать такие понятия и обозначения:

- ▶  $\Pi(M, s)$  — множество всех бесконечных путей в  $M$ , исходящих из  $s$
- ▶  $\Pi(M)$  — множество всех вычислений  $M$ 
  - ▶ То есть  $\Pi(M) = \bigcup_{s_0 \in S_0} \Pi(M, s_0)$
- ▶  $\text{Tr}(M, s)$  — множество всех трасс путей из  $\Pi(M, s)$
- ▶  $\text{Tr}(M)$  — множество всех трасс вычислений из  $\Pi(M)$ 
  - ▶ То есть  $\text{Tr}(M) = \bigcup_{s_0 \in S_0} \text{Tr}(M, s_0)$
- ▶  $\text{Tr}$  — множество всех трасс (для заданного множества AP)
- ▶  $\text{Tr}_f$  — множество всех конечных трасс
- ▶  $M$  удовлетворяет свойству трасс  $P$  ( $M \models P$ ), если  $\text{Tr}(M) \subseteq P$

# Свойства трасс

*Пояснение* соотношения  $M \models P$

для модели Крипке  $M$  и свойства трасс  $P$ :

- ▶ Всевозможные трассы делятся свойством  $P$  на **хорошие** (обладающие свойством  $P$ ) и **плохие** (не обладающие свойством  $P$ )
- ▶ Соотношение  $M \models P$  означает, что все трассы модели  $M$  **хорошие** (т.е. что в модели  $M$  нет ни одной **плохой** трассы)

## Утверждение

**Для любых моделей Крипке  $M$ ,  $M'$  и свойства трасс  $P$  верно: если  $\text{Tr}(M) \subseteq \text{Tr}(M')$  и  $M' \models P$ , то  $M \models P$**

*Доказательство.* Очевидным образом следует из определений и из свойства транзитивности включения множеств

# Свойства безопасности и живости

При анализе поведения систем  
зачастую рассматриваются свойства трасс двух классов:

- ▶ Свойства безопасности

- ▶ Safety properties

- ▶ Свойства живости

- ▶ Или, по-другому, — свойства живучести
- ▶ Liveness properties

## Свойства безопасности и живости

Свойство трасс  $P$  называется **свойством безопасности**, если у любой трассы  $\tau$ , не обладающей этим свойством, существует конечный префикс, любое бесконечное продолжение которого не обладает этим свойством

$$(\forall \tau \in \text{Tr} \setminus P : \exists \tau_1 \in \text{Tr}_f : \exists \tau_2 \in \text{Tr} : \tau = \tau_1 \tau_2 \text{ и } \forall \tau_3 \in \text{Tr} : \tau_1 \tau_3 \notin P)$$

### Пояснение

Трассы, обладающие свойством  $P$ , считаются **безопасными**, а не обладающие — **опасными**

При этом понятие **(без)опасности** подобрано так, что если трасса

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma_3 \rightarrow \dots$$

**опасна**, то существует обзримая (конечная) совокупность событий

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma_3 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_n,$$

от начала работы системы до некоторого (конечного) момента времени, по которой и все другие трассы можно признать **опасными**

То есть **опасность**, однажды наступив, не может быть устранена дальнейшими событиями

# Свойства безопасности и живости

**Примеры** требований, отвечающих свойствам безопасности:

- ▶ Два процесса не обратятся одновременно к одной ячейке памяти
  - ▶ *Опасность*: сейчас два процесса обращаются к одной ячейке
- ▶ Пока принтер не завершит печать, он не доступен для других устройств
  - ▶ *Опасность*: сейчас принтер занят печатью для одного устройства и при этом доступен для другого
- ▶ Команда выполняется процессором не более трёх тактов подряд
  - ▶ *Опасность*: команда выполняется четыре последних такта
- ▶ Красный свет загорается только после жёлтого
  - ▶ *Опасность*:  
раньше жёлтый свет не загорался, а сейчас горит красный

## Свойства безопасности и живости

Свойство трасс  $P$  называется **свойством живости**, если для любой конечной трассы существует бесконечное продолжение, обладающее этим свойством

$$(\forall \tau_1 \in \text{Tr}_f : \exists \tau_2 \in \text{Tr} : \tau_1 \tau_2 \in P)$$

### Пояснение

Определение живости можно прочесть так:

**как бы ни работала система, обязательно есть возможность ей выполняться дальше так, чтобы она была признана живой (не сломавшейся, не зависшей, не отключившейся, ...)**

Способ продолжения произвольной трассы до входящей в  $P$  — это способ **подтверждения живости**, не зависящий от истории событий до текущего момента и задающийся в терминах как конечного, так и бесконечного продолжения работы системы

**Мёртвая** в этом смысле система — это такая, которая после выполнения некоторых действий оказалась неспособной ни при каких обстоятельствах подтвердить свою **живость**

# Свойства безопасности и живости

**Примеры** требований, отвечающих свойствам живости:

- ▶ Рано или поздно загорится зелёный свет
  - ▶ *Мёртвая система* больше не может зажечь зелёный свет
- ▶ После завершения печати принтер стирает содержимое буфера
  - ▶ *Мёртвая система* ни при каких условиях не опустошит буфер
- ▶ Рано или поздно наступит следующий такт работы процессора
  - ▶ *Мёртвая система* потеряла возможность осциллировать тактовым сигналом
- ▶ Процесс бесконечно часто обращается к заданной ячейке памяти
  - ▶ *Мёртвая система* может обратиться к ячейке памяти лишь конечное число раз

# Свойства безопасности и живости

**Утверждение.** Если свойство трасс  $P$  является и свойством безопасности, и свойством живости, то  $P = \text{Tr}$

Доказательство.

Можете попробовать самостоятельно, это не очень трудно

**Утверждение.** Для любого свойства трасс  $P$  существуют такие свойство безопасности  $P_s$  и свойство живости  $P_\ell$ , для которых верно  $P = P_s \cap P_\ell$

Доказательство.

Можете попробовать самостоятельно (и это может быть трудно)

# Свойства безопасности и живости

## Пример

**Процесс при запуске открывает файл  
и затем бесконечно часто обращается к этому файлу**

Это не свойство безопасности: если файл открыт при запуске, то для этого случая невозможно подобрать подходящее понятие **опасности**

Это не свойство живости: если файл не открыт при запуске, то позже невозможно сделать его «открытым при запуске»

Но это пересечение свойства безопасности

**Процесс при запуске открывает файл  
и свойства живости**

**Процесс бесконечно часто обращается к файлу**