

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 35

Хорновские логические программы:
полнота операционной семантики

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Вступление

Для ХЛП определены две семантики:

1. Декларативная (основная):

- ▶ Программа — это система формул
- ▶ **Правильный ответ** — это подстановка целевых переменных, при применении которой к запросу он следует из программы

2. Операционная (вспомогательная):

- ▶ Шаг вычисления программы — это применение правила SLD-резолюции
- ▶ **SLD-вычисляемый ответ** — это композиция подстановок, получаемых по ходу вычисления, спроектированная на целевые переменные

Показано, что каждый SLD-вычисляемый ответ является правильным

А верно ли утверждение в обратную сторону?

(О том, что любой правильный ответ обязательно является SLD-вычислимым)

Особенности полноты операционной семантики

Рассмотрим такой **пример**:

$$\begin{aligned} & p(\mathbf{f}(X), \mathbf{c}) \leftarrow q(X); \\ & q(X); \\ & ?p(X, Y) \end{aligned}$$

Правильным ответом на этот запрос к этой программе является, например, подстановка $\theta = \{X/\mathbf{f}(\mathbf{c}), Y/\mathbf{c}\}$

При этом единственный (с точностью до переименования) SLD-вычисляемый ответ $\{X/\mathbf{f}(X), Y/\mathbf{c}\}$ не совпадает с θ

Значит, *ожидаемое* утверждение «любой правильный ответ является SLD-вычислимым» заведомо неверно

Но упомянутый правильный ответ является *частным случаем* вычисленного:

$$\{X/\mathbf{f}(\mathbf{c}), Y/\mathbf{c}\} = \{X/\mathbf{f}(X), Y/\mathbf{c}\} \{X/\mathbf{c}\}$$

Докажем полноту операционной семантики с поправкой на это наблюдение

Общая схема обоснования полноты

Подстановку θ будем называть **частным случаем** подстановки η , а подстановку η — **обобщением** подстановки θ , если существует подстановка μ , такая что $\theta = \eta\mu$

Записью $[P]$ обозначим *бесконечную* ХЛП, состоящую из всех основных примеров всех правил ХЛП P в произвольном порядке

Полнота операционной семантики будет обосновываться так:

1. Рассмотрим произвольный правильный ответ θ на запрос Q к программе P
2. Покажем, как построить успешное вычисление ответа ε на особый основной запрос $Q\theta\mu$ к бесконечной программе $[P]$
(**лемма об основных вычислениях**)
3. Покажем, как преобразовать построенное вычисление на запрос $Q\theta\mu$ к $[P]$ в успешное вычисление некоторого обобщения η ответа $\theta\mu$ на запрос Q к P
(**лемма о подъёме вычисления**)
4. Покажем, что ответ θ — частный случай ответа η

Лемма об основных вычислениях

Для любой ХЛП \mathcal{P} и любого основного запроса \mathcal{Q} , такого что $S_{\mathcal{P}} \models \Phi_{\mathcal{Q}}$, существует успешное SLD-резольютивное вычисление, порождённое запросом \mathcal{Q} к $[\mathcal{P}]$

Доказательство

Пусть $\mathcal{P} = (\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$

Согласно **теореме о логическом следствии**, если $S_{\mathcal{P}} \models \Phi_{\mathcal{Q}}$, то формула $\Phi_{\mathcal{R}_1} \& \dots \& \Phi_{\mathcal{R}_n} \rightarrow \Phi_{\mathcal{Q}}$ общезначима

Следовательно, система дизъюнктов $\{\Phi_{\mathcal{R}_1}, \dots, \Phi_{\mathcal{R}_n}, \neg \Phi_{\mathcal{Q}}\}$, **отвечающая отрицанию этой формулы**, невыполнима

По **теореме Эрбрана**, существует конечный набор основных примеров D_1, \dots, D_m дизъюнктов из $\{\Phi_{\mathcal{R}_1}, \dots, \Phi_{\mathcal{R}_n}\}$, такой что система основных дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m, \neg \Phi_{\mathcal{Q}}\}$ невыполнима

Согласно соответствиям **между запросами, правилами и дизъюнктами** и **между SLD-резольютивными вычислениями и резольютивными выводами**, осталось показать, что существует входной вывод \square из S , инициированный дизъюнктом $\neg \Phi_{\mathcal{Q}}$

Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_Q\}$; $S : \neg\Phi_Q \rightsquigarrow \square$?

По **теореме о полноте резольютивного вывода**, существует вывод \mathfrak{D} пустого дизъюнкта \square из S

Но этот вывод не обязан быть входным, и тем более инициированным $\neg\Phi_Q$

Осталось показать, как перестроить вывод \mathfrak{D} во входной, инициированный $\neg\Phi_Q$

В качестве отправной точки используем тот факт, что \square может быть получен **только** как резольвента D -запроса и D -правила (но не обязательно из S), и значит, в частности, в выводе \mathfrak{D} есть хотя бы один D -запрос

Проблема 1, которую требуется решить, чтобы вывод стал входным: в выводе могут строиться «лишние» резольвенты и склейки, т.е. такие, которые никак не связаны с получением \square

Очистим вывод от таких резольвент, склеек и вариантов, не использующихся для получения \square

Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_Q\}; \quad S : \neg\Phi_Q \rightsquigarrow \square ?$

Проблема 2: в выводе может строиться резольвента D -запроса и резольвенты двух D -правил:

$$\begin{array}{c}
 \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A) \quad B'_1 \& \dots \& B'_m \& E \rightarrow A \quad B''_1 \& \dots \& B''_n \rightarrow E \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \searrow \qquad \qquad \swarrow \\
 \qquad \qquad \qquad B'_1 \& \dots \& B'_m \& B''_1 \& \dots \& B''_n \rightarrow A \\
 \qquad \qquad \qquad \swarrow \\
 \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B'_1 \& \dots \& B'_k \& B''_1 \& \dots \& B''_n)
 \end{array}$$

Эту проблему можно решить, перестроив вывод:

$$\begin{array}{c}
 \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A) \quad B'_1 \& \dots \& B'_m \& E \rightarrow A \quad B''_1 \& \dots \& B''_n \rightarrow E \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \swarrow \qquad \qquad \searrow \\
 \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B'_1 \& \dots \& B'_k \& E) \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \swarrow \\
 \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B'_1 \& \dots \& B'_k \& B''_1 \& \dots \& B''_n)
 \end{array}$$

Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$$S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_Q\}; \quad S : \neg\Phi_Q \rightsquigarrow \square ?$$

Проблема 3: в выводе может строиться резольвента D -запроса и склейки D -правила:

$$\begin{array}{ccc} \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A) & B_1 \& \dots \& B_k \& E \& E \rightarrow A \\ \downarrow & & \downarrow \\ & B_1 \& \dots \& B_k \& E \rightarrow A & \\ & \swarrow & \\ \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B_1 \& \dots \& B_k \& E) & \end{array}$$

Эту проблему тоже можно решить, перестроив вывод:

$$\begin{array}{ccc} \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A) & B_1 \& \dots \& B_k \& E \& E \rightarrow A \\ \downarrow & & \swarrow \\ \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B_1 \& \dots \& B_k \& E \& E) & \\ \downarrow & & \\ \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B_1 \& \dots \& B_k \& E) & \end{array}$$

Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_Q\}; \quad S : \neg\Phi_Q \rightsquigarrow \square ?$

Проблема 4 (последняя): в выводе может строиться склейка D -запроса

Рассмотрим последнюю такую склейку:

$$Q_1 = \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A \& A) \rightarrow Q_2 = \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A) \rightarrow \dots \rightarrow \square$$

$\nearrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\mathcal{R}_2 \quad \dots \quad \mathcal{R}_k$

Из входного вывода \square из Q_2 можно получить входной вывод \mathfrak{D}' дизъюнкта \square из $\neg A$, удалив

- ▶ изображённые атомы C_1, \dots, C_m ,
- ▶ все атомы остальных запросов, получающиеся из них переписыванием без изменений или применением правила резолюции,
- ▶ все правила, применявшиеся ко всем этим атомам для получения резольвент и
- ▶ все дублирующиеся запросы

Применив к Q_1 правила, применявшиеся в \mathfrak{D}' , можно получить входной вывод Q_2 из Q_1 ▼

Лемма о подъёме вычисления

Для любых ХЛП \mathcal{P} , ответа к ней θ и запроса \mathcal{Q} , таких что $\mathcal{Q}\theta$ — основной запрос, верно: если для $[\mathcal{P}]$ существует успешное SLD-резольтивное вычисление, порождённое запросом $\mathcal{Q}\theta$, то для \mathcal{P} существует успешное SLD-резольтивное вычисление, порождённое запросом \mathcal{Q} , результат которого — это обобщение подстановки θ

Доказательство

Рассмотрим успешное SLD-резольтивное вычисление программы $[\mathcal{P}]$, порождённое запросом $\mathcal{Q}\theta$:

$$\mathcal{Q}_1^g \xrightarrow{\mathcal{R}_1^g, k_1, \epsilon} \mathcal{Q}_2^g \xrightarrow{\mathcal{R}_2^g, k_2, \epsilon} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n^g, k_n, \epsilon} \square$$

Покажем, как по нему построить успешное SLD-резольтивное вычисление программы \mathcal{P} , порождённое запросом \mathcal{Q} :

$$\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square$$

Лемма о подъёме вычисления (доказательство)

$$Q_1^g \xrightarrow{\mathcal{R}_1^g, k_1, \varepsilon} Q_2^g \xrightarrow{\mathcal{R}_2^g, k_2, \varepsilon} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n^g, k_n, \varepsilon} \square$$

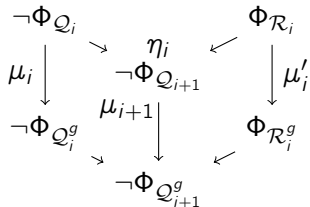
$$(\exists?) Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} Q_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square$$

Чтобы «поднять» один шаг вывода, воспользуемся **леммой о подъёме для дизъюнктов** и **соответствием вычислений ХЛП** и **входных выводов**

$\neg\Phi_{Q_i^g}$ и $\Phi_{\mathcal{R}_i^g}$ — это основные примеры дизъюнктов $\neg\Phi_{Q_i}$ и $\Phi_{\mathcal{R}_i}$

$\neg\Phi_{Q_{i+1}^g}$ — это резольвента дизъюнктов $\neg\Phi_{Q_i^g}$ и $\Phi_{\mathcal{R}_i^g}$

Значит, **согласно лемме о подъёме и её доказательству**, соседние запросы вычислений соотносятся так:



Резольвента $\neg\Phi_{Q_{i+1}^g}$ дизъюнктов $\neg\Phi_{Q_i^g}$ и $\Phi_{\mathcal{R}_i^g}$ для унификатора η_i существует, и $\mu_i \cup \mu'_i = \eta_i \mu_{i+1}$, то есть $\mu_i = (\eta_i \mu_{i+1})|_{\text{Var}_{Q_i}}$, и при этом $\mu_1 = \theta$

Последовательно применяя это соотношение к $i = 1, 2, \dots$, получим требуемое вычисление, а также соотношение $\theta = (\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n)|_{\text{Var}_Q} \mu$ для некоторой подстановки μ ▼

Теорема о полноте операционной семантики ХЛП

Для любых ХЛП \mathcal{P} и запроса \mathcal{Q} любой правильный ответ на запрос \mathcal{Q} к \mathcal{P} является частным случаем хотя бы одного SLD-вычислимого ответа на запрос \mathcal{Q} к \mathcal{P}

Доказательство. Рассмотрим правильный ответ θ на запрос \mathcal{Q} к \mathcal{P}

Пусть $\text{Var}_{\mathcal{Q}\theta} = \{Z_1, \dots, Z_k\}$

Выберем константы $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$, не содержащиеся ни в \mathcal{P} , ни в \mathcal{Q} , ни в термах из θ

Символом μ обозначим подстановку $\{Z_1/\mathbf{c}_1, \dots, Z_k/\mathbf{c}_k\}$

θ — правильный ответ, а значит, верно соотношение $\mathcal{P} \models \forall \tilde{Z}^k (\mathcal{Q}\theta)$

Следовательно, верно и $\mathcal{P} \models \mathcal{Q}\theta\mu$

По **лемме об основных вычислениях**, существует успешное SLD-резольтивное вычисление программы $[\mathcal{P}]$, порождённое запросом $\mathcal{Q}\theta\mu$

По **лемме о подъёме вычисления**, существует успешное SLD-резольтивное вычисление программы \mathcal{P} , порождённое запросом \mathcal{Q} , и для результата η этого вычисления и некоторой подстановки ρ верно $\theta\mu = \eta\rho$

Теорема о полноте операционной семантики ХЛП

Доказательство

$\text{Var}_{\mathcal{Q}\theta} = \{Z_1, \dots, Z_k\}$; $\mu = \{Z_1/\mathbf{c}_1, \dots, Z_k/\mathbf{c}_k\}$; η — SLD-вычислимый ответ; $\exists \rho : \theta\mu = \eta\rho$

Заменим константы $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ на переменные Z_1, \dots, Z_k во всех термах в правых частях связок подстановок θ , μ , η и ρ

Так как константы $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ не содержатся в \mathcal{P} и в \mathcal{Q} , то они не содержатся и в подстановке η

Подстановка μ в результате такой замены заменится на ε

Значит, в результате такой замены равенство

$$\theta\mu = \eta\rho$$

преобразуется в

$$\theta = \eta\rho'$$

для некоторой подстановки ρ' , то есть правильный ответ θ действительно является частным случаем некоторого SLD-вычислимого ответа η ▼