

# Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

## Блок 35

Хорновские логические программы:  
полнота операционной семантики

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

# Вступление

Для ХЛП определены две семантики:

## 1. Декларативная (основная):

- ▶ Программа — это система формул
- ▶ **Правильный ответ** — это подстановка целевых переменных, при применении которой к запросу он следует из программы

## 2. Операционная (вспомогательная):

- ▶ Шаг вычисления программы — это применение правила SLD-резолюции
- ▶ **SLD-вычисляемый ответ** — это композиция подстановок, получаемых по ходу вычисления, спроектированная на целевые переменные

Показано, что каждый SLD-вычисляемый ответ является правильным

**А верно ли утверждение в обратную сторону?**

*(О том, что любой правильный ответ обязательно является SLD-вычисляемым)*

## Особенности полноты операционной семантики

Рассмотрим такой **пример**:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{f}(X), \mathbf{c}) &\leftarrow q(X); \\ q(X); \\ ?p(X, Y) \end{aligned}$$

Правильным ответом на этот запрос к этой программе является, например, подстановка  $\theta = \{X/\mathbf{f}(\mathbf{c}), Y/\mathbf{c}\}$

При этом единственный (с точностью до переименования) SLD-вычисляемый ответ  $\{X/\mathbf{f}(X), Y/\mathbf{c}\}$  не совпадает с  $\theta$

Значит, *ожидаемое* утверждение «любой правильный ответ является SLD-вычислимым» заведомо неверно

Но упомянутый правильный ответ является *частным случаем* вычисленного:

$$\{X/\mathbf{f}(\mathbf{c}), Y/\mathbf{c}\} = \{X/\mathbf{f}(X), Y/\mathbf{c}\}\{X/\mathbf{c}\}$$

Докажем полноту операционной семантики с поправкой на это наблюдение

## Общая схема обоснования полноты

Подстановку  $\theta$  будем называть **частным случаем** подстановки  $\eta$ , а подстановку  $\eta$  — **обобщением** подстановки  $\theta$ , если существует подстановка  $\mu$ , такая что  $\theta = \eta\mu$

Записью  $[P]$  обозначим *бесконечную* ХЛП, состоящую из всех основных примеров всех правил ХЛП  $P$  в произвольном порядке

Полнота операционной семантики будет обосновываться так:

1. Рассмотрим произвольный правильный ответ  $\theta$  на запрос  $Q$  к программе  $P$
2. Покажем, как построить успешное вычисление ответа  $\varepsilon$  на особый основной запрос  $Q\theta\mu$  к бесконечной программе  $[P]$   
(**лемма об основных вычислениях**)
3. Покажем, как преобразовать построенное вычисление на запрос  $Q\theta\mu$  к  $[P]$  в успешное вычисление некоторого обобщения  $\eta$  ответа  $\theta\mu$  на запрос  $Q$  к  $P$   
(**лемма о подъёме вычисления**)
4. Покажем, что ответ  $\theta$  — частный случай ответа  $\eta$

## Лемма об основных вычислениях

Для любой ХЛП  $\mathcal{P}$  и любого основного запроса  $Q$ , такого что  $S_{\mathcal{P}} \models \Phi_Q$ , существует успешное SLD-резольтивное вычисление, порождённое запросом  $Q$  к  $[\mathcal{P}]$

### Доказательство

Пусть  $\mathcal{P} = (\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$

Согласно **теореме о логическом следствии**, если  $S_{\mathcal{P}} \models \Phi_Q$ , то формула  $\Phi_{\mathcal{R}_1} \& \dots \& \Phi_{\mathcal{R}_n} \rightarrow \Phi_Q$  общезначима

Следовательно, система дизъюнктов  $\{\Phi_{\mathcal{R}_1}, \dots, \Phi_{\mathcal{R}_n}, \neg\Phi_Q\}$ , отвечающая отрицанию этой формулы, невыполнима

По **теореме Эрбрана**, существует конечный набор основных примеров  $D_1, \dots, D_m$  дизъюнктов из  $\{D_{\mathcal{R}_1}, \dots, D_{\mathcal{R}_n}\}$ , такой что система основных дизъюнктов  $S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_Q\}$  невыполнима

Согласно соответствиям **между запросами, правилами и дизъюнктами и между SLD-резольтивными вычислениями и резольтивными выводами**, осталось показать, что существует входной вывод  $\square$  из  $S$ , инициированный дизъюнктом  $\neg\Phi_Q$

## Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_Q\}$ ;  $S : \neg\Phi_Q \rightsquigarrow \square$  ?

По теореме о полноте резольютивного вывода, существует вывод  $\mathfrak{D}$  пустого дизъюнкта  $\square$  из  $S$

**Но** этот вывод не обязан быть входным, и тем более инициированным  $\neg\Phi_Q$

Осталось показать, как перестроить вывод  $\mathfrak{D}$  во входной, инициированный  $\neg\Phi_Q$

В качестве отправной точки используем тот факт, что  $\square$  может быть получен **только** как резольвента дизъюнкта-запроса и дизъюнкта-правила (но не обязательно из  $S$ ), и значит, в частности, в выводе есть хотя бы один запрос

*Проблема 1*, которую требуется решить, чтобы вывод стал входным: в выводе могут строиться «лишние» резольвенты и склейки, т.е. такие, которые никак не связаны с получением  $\square$

Очистим вывод от таких резольвент, склеек и вариантов, не использующихся для получения  $\square$

## Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$$S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_Q\}; \quad S : \neg\Phi_Q \rightsquigarrow \square ?$$

**Проблема 2:** в выводе может строиться резольвента дизъюнкта-запроса и резольвенты двух дизъюнктов-правил:

$$\begin{array}{l} \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A) \quad B'_1 \& \dots \& B'_m \& E \rightarrow A \quad B''_1 \& \dots \& B''_n \rightarrow E \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \searrow \qquad \qquad \swarrow \\ \qquad \qquad \qquad B'_1 \& \dots \& B'_m \& B''_1 \& \dots \& B''_n \rightarrow A \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \swarrow \\ \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B'_1 \& \dots \& B'_k \& B''_1 \& \dots \& B''_n) \end{array}$$

Эту проблему можно решить, перестроив вывод:

$$\begin{array}{l} \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A) \quad B'_1 \& \dots \& B'_m \& E \rightarrow A \quad B''_1 \& \dots \& B''_n \rightarrow E \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \swarrow \qquad \qquad \searrow \\ \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B'_1 \& \dots \& B'_k \& E) \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \swarrow \\ \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B'_1 \& \dots \& B'_k \& B''_1 \& \dots \& B''_n) \end{array}$$

## Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$$S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_Q\}; \quad S : \neg\Phi_Q \rightsquigarrow \square ?$$

**Проблема 3:** в выводе может строиться резольвента дизъюнкта-запроса и склейки дизъюнкта-правила:

$$\begin{array}{ccc} \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A) & B_1 \& \dots \& B_k \& E \& E \rightarrow A \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & B_1 \& \dots \& B_k \& E \rightarrow A \\ & \swarrow & \\ \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B_1 \& \dots \& B_k \& E) & \end{array}$$

Эту проблему тоже можно решить, перестроив вывод:

$$\begin{array}{ccc} \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A) & B_1 \& \dots \& B_k \& E \& E \rightarrow A \\ \downarrow & & \swarrow \\ \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B_1 \& \dots \& B_k \& E \& E) & \\ \downarrow & & \\ \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& B_1 \& \dots \& B_k \& E) & \end{array}$$

## Лемма об основных вычислениях (доказательство)

$$S = \{D_1, \dots, D_m, \neg\Phi_Q\}; \quad S : \neg\Phi_Q \rightsquigarrow \square ?$$

**Проблема 4** (последняя): в выводе может строиться склейка запроса

Рассмотрим последнюю такую склейку:

$$Q_1 = \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A \& A) \rightarrow Q_2 = \neg(C_1 \& \dots \& C_m \& A) \rightarrow \dots \rightarrow \square$$

$\nearrow$   
 $\mathcal{R}_2 \quad \dots \quad \mathcal{R}_k$   
 $\uparrow$

Из входного вывода  $\square$  из  $Q_2$  можно получить входной вывод  $\mathcal{D}'$  дизъюнкта  $\square$  из  $\neg A$ , удалив

- ▶ изображённые атомы  $C_1, \dots, C_m$ ,
- ▶ все атомы остальных запросов, получающиеся из них переписыванием без изменений или применением правила резолюции,
- ▶ все правила, применявшиеся ко всем этим атомам для получения резольвент и
- ▶ все дублирующиеся запросы

Применив к  $Q_1$  правила, применявшиеся в  $\mathcal{D}'$ , можно получить входной вывод  $Q_2$  из  $Q_1$  ▼

## Лемма о подъёме вычисления

Для любых ХЛП  $\mathcal{P}$ , ответа к ней  $\theta$  и запроса  $\mathcal{Q}$ , таких что  $\mathcal{Q}\theta$  — основной запрос, верно: если для  $[\mathcal{P}]$  существует успешное SLD-резольтивное вычисление, порождённое запросом  $\mathcal{Q}\theta$ , то для  $\mathcal{P}$  существует успешное SLD-резольтивное вычисление, порождённое запросом  $\mathcal{Q}$ , результат которого — обобщение подстановки  $\theta$

### Доказательство

Рассмотрим успешное SLD-резольтивное вычисление программы  $[\mathcal{P}]$ , порождённое запросом  $\mathcal{Q}\theta$ :

$$\mathcal{Q}_1^g \xrightarrow{\mathcal{R}_1^g, k_1, \varepsilon} \mathcal{Q}_2^g \xrightarrow{\mathcal{R}_2^g, k_2, \varepsilon} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n^g, k_n, \varepsilon} \square$$

Покажем, как по нему построить успешное SLD-резольтивное вычисление программы  $\mathcal{P}$ , порождённое запросом  $\mathcal{Q}$ :

$$\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square$$

# Лемма о подъёме вычисления (доказательство)

$$Q_1^g \xrightarrow{\mathcal{R}_1^g, k_1, \varepsilon} Q_2^g \xrightarrow{\mathcal{R}_2^g, k_2, \varepsilon} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n^g, k_n, \varepsilon} \square$$

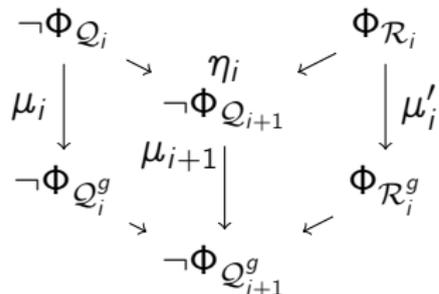
$$(\exists?) Q_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_1, k_1, \eta_1} Q_2 \xrightarrow{\mathcal{R}_2, k_2, \eta_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{R}_n, k_n, \eta_n} \square$$

Чтобы «поднять» один шаг вывода, воспользуемся леммой о подъёме для дизъюнктов и соответствием вычислений ХЛП и входных выводов

$\neg\Phi_{Q_i^g}$  и  $\Phi_{\mathcal{R}_i^g}$  — это основные примеры дизъюнктов  $\neg\Phi_{Q_i}$  и  $\Phi_{\mathcal{R}_i}$

$\neg\Phi_{Q_{i+1}^g}$  — это резольвента дизъюнктов  $\neg\Phi_{Q_i^g}$  и  $\Phi_{\mathcal{R}_i^g}$

Значит, согласно лемме о подъёме и её доказательству, соседние запросы вычислений соотносятся так:



Резольвента  $\neg\Phi_{Q_{i+1}}$  дизъюнктов  $\neg\Phi_{Q_i}$  и  $\Phi_{\mathcal{R}_i}$  для унификатора  $\eta_i$  существует, и  $\mu_i \cup \mu'_i = \eta_i \mu_{i+1}$ , то есть  $\mu_i = (\eta_i \mu_{i+1})|_{\text{Var}_{Q_i}}$ , и при этом  $\mu_1 = \theta$

Последовательно применяя это соотношение к  $i = 1, 2, \dots$ , получим требуемое вычисление, а также соотношение  $\theta = (\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n)|_{\text{Var}_Q} \mu$  для некоторой подстановки  $\mu$  ▼

## Теорема о полноте операционной семантики ХЛП

Для любых ХЛП  $\mathcal{P}$  и запроса  $Q$  любой правильный ответ на запрос  $Q$  к  $\mathcal{P}$  является частным случаем хотя бы одного SLD-вычислимого ответа на запрос  $Q$  к  $\mathcal{P}$

**Доказательство.** Рассмотрим правильный ответ  $\theta$  на запрос  $Q$  к  $\mathcal{P}$

Пусть  $\text{Var}_{Q\theta} = \{z_1, \dots, z_k\}$

Выберем константы  $c_1, \dots, c_k$ , не содержащиеся ни в  $\mathcal{P}$ , ни в  $Q$ , ни в термах из  $\theta$

Символом  $\mu$  обозначим подстановку  $\{z_1/c_1, \dots, z_k/c_k\}$

$\theta$  — правильный ответ, а значит, верно соотношение  $\mathcal{P} \models \forall z^k (Q\theta)$

Следовательно, верно и  $\mathcal{P} \models Q\theta\mu$

По **лемме об основных вычислениях**, существует успешное SLD-резольтивное вычисление программы  $[\mathcal{P}]$ , порождённое запросом  $Q\theta\mu$

По **лемме о подъёме вычисления**, существует успешное SLD-резольтивное вычисление программы  $\mathcal{P}$ , порождённое запросом  $Q$ , и для результата  $\eta$  этого вычисления и некоторой подстановки  $\rho$  верно  $\theta\mu = \eta\rho$

# Теорема о полноте операционной семантики ХЛП

## Доказательство

$\text{Var}_{\mathcal{Q}\theta} = \{Z_1, \dots, Z_k\}$ ;  $\mu = \{Z_1/\mathbf{c}_1, \dots, Z_k/\mathbf{c}_k\}$ ;  $\eta$  — SLD-вычислимый ответ;  $\exists \rho : \theta\mu = \eta\rho$

---

Заменим константы  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$  на переменные  $Z_1, \dots, Z_k$  во всех термах в правых частях связок подстановок  $\theta$ ,  $\mu$ ,  $\eta$  и  $\rho$

Так как константы  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$  не содержатся в  $\mathcal{P}$  и в  $\mathcal{Q}$ , то они не содержатся и в подстановке  $\eta$

Подстановка  $\mu$  в результате такой замены заменится на  $\varepsilon$

Значит, в результате такой замены равенство

$$\theta\mu = \eta\rho$$

преобразуется в

$$\theta = \eta\rho'$$

для некоторой подстановки  $\rho'$ , то есть правильный ответ  $\theta$  действительно является частным случаем некоторого SLD-вычислимого ответа  $\eta$  ▼