Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 19

Алгоритм Туэга

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, весенний семестр

Задача и допущения

Вернёмся к задаче вычисления таблиц маршрутизации: требуется в каждом узле s р.с. для каждого узла-адресата d вычислить значение $table_s[d]$ следующего узла оптимального пути из s в d

Для определённости положим, что если $s = d$ или d недостижимо из s, то $table_s[d] = \bot$

Будем использовать такие основные допущения:

1. Справедливы основные допущения в задаче маршрутизации
2. Справедливы положения об устройстве весов рёбер (каналов) и весов путей из алгоритма Флойда-Уоршелла
3. Каждый цикл в сети имеет положительный вес
4. Граф топологии имеет вид $\Gamma = (V, E)$, и ω_e — вес канала e
5. Каждый узел v знает
   - имена всех узлов и их порядок $(v_1, \ldots, v_n)$, одинаковый для всех узлов
   - имена своих соседей: множество $Neigh_v$
   - веса каналов, соединяющих его с соседями

Обсуждение алгоритма Туэга принято начинать с его упрощённой версии (для лучшего восприятия)

Упрощённый алгоритм Туэга

Основные отличия упрощённого алгоритма Туэга от алгоритма Флойда-Уоршелла:

- Переменные и операции над ними «разнесены» по узлам сети: значение $\rho[s, d] = \rho_s[d]$ вычисляется в $r_s[d]$ в узле s
- Перед обновлением значения переменной r_s узел s получает всю необходимую информацию из сообщений
- Информация об опорном узле v, отправляется всем узлам при помощи команды «broadcast»:
  - при выполнении $\mathrm{broadcast}(x)$ отправляются сообщения x со всевозможными адресатами, кроме узла-отправителя
- В узле s вычисляются не только требуемые веса (ρ_s в r_s), но и значения таблицы маршрутизации ($table_s$ в τ_s)

Упрощённый алгоритм Туэга

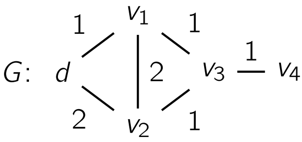
Оптимальным W-путём из s в d назовём W-путь из s в d наименьшего веса среди всех W-путей из s в d

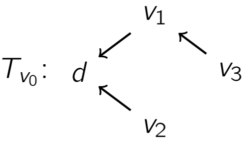
Лемма (об отсутствии циклов). Пусть:

- **Справедливы основные допущения**
- **Заданы множество узлов W и узел d**
- **Если $\rho^W[s,d] < \infty$ и $s \neq d$, то $\tau_s[d]$ — имя узла, следующего за s в каком-либо оптимальном W-пути из s в d**
- $\Gamma_d = (V_d, E_d)$ **— орграф, в котором:**
  - $V_d = \{s \mid s \in V,\ \rho^W[s,d] < \infty\}$
  - $E_d = \{(s,v) \mid (s,v) \in V_d^2,\ s \neq d,\ \tau_s[d] = v\}$

Тогда Γ_d — дерево с корнем (стоком) d

Иллюстрация (для $W = \{v_1, v_2\}$):





Упрощённый алгоритм Туэга

Доказательство.

По лемме о подпутях, если для узла s верно $\rho^W[s, d] < \infty$ и $s \neq d$, то $\tau_s[d] = v \neq \perp$

Следовательно, для каждого узла $s \in V_d \setminus \{d\}$ существует (единственный) узел $v \in V_d$, такой что $\tau_s[d] = v$

То есть для каждого $s \in V_d \setminus \{d\}$ в E_d существует единственная дуга вида $s \to \_$

При этом по построению из d в Γ_d не исходит ни одной дуги

Следовательно, $|E_d| = |V_d| - 1$

Упрощённый алгоритм Туэга

Доказательство.

Предположим от противного, что в Γ_d не дерево

Тогда в Γ_d существует цикл (для ясности — $v_1 \to \dots \to v_k \to v_1$)

Для любого канала $(x, y) \in E_d$ верно $\rho^W(x, d) = \omega_{(x,y)} + \rho^W(y, d)$

Значит, верно равенство

$$\rho^W(v_1, d) = \omega_{(v_1,v_2)} + \omega_{(v_2,v_3)} + \dots + \omega_{(v_{k-1},v_k)} + \omega_{(v_k,v_1)} + \rho^W(v_1, d)$$

Но тогда $\omega_{(v_1,v_2)} + \omega_{(v_2,v_3)} + \dots + \omega_{(v_{k-1},v_k)} + \omega_{(v_k,v_1)} = 0$ — в Γ_d содержится цикл веса 0, что *противоречит* допущению 3

Следовательно, Γ_d — граф без циклов, в котором количество дуг на 1 меньше количества вершин, то есть дерево ▼

Упрощённый алгоритм Туэга

Упрощённый алгоритм Туэга: каждому узлу s отвечает следующий код

1. $W_s := \emptyset$;
2. Для каждого $v \in V$:
   2.1 Если $v = s$: $r_s[v] := 0$; $\tau_s[v] := \perp$;
   2.2 Если $v \in Neigh_s$: $r_s[v] := \omega_{(s,v)}$; $\tau_s[v] := v$;
   2.3 Иначе: $r_s[v] := \infty$; $\tau_s[v] := \perp$;
3. Пока $W_s \neq V$:
   3.1 Произвольно выбрать $v \in V \setminus W_s$
   (опорный узел, одинаковый для всех узлов)
   3.2 Если $v = s$, то $\mathrm{broadcast}(r_s)$, иначе $\mathrm{receive}_v(r_v)$
   3.3 Для всех $d \in V$:
      3.3.1 Если $r_s[v] + r_v[d] < r_s[d]$: $r_s[d] := r_s[v] + r_v[d]$; $\tau_s[d] := \tau_s[v]$;
   3.4 $W_s := W_s \cup \{v\}$;
4. Выдать ответ: $\rho_s = r_s$, $table_s = \tau_s$

Упрощённый алгоритм Туэга

Теорема (корректность). **Любое вычисление упрощённого алгоритма Туэга в основных допущениях конечно, в последней его конфигурации для любых узлов s, d верно**

- $r_s[d] = \rho[s, d]$ **и**
- **если** $\rho[s, d] < \infty$ **и** $s \neq d$, **то** $\tau_s[d] = table_s[d]$**,**

и если граф G связен, то таблицы τ_s в последней конфигурации гарантируют доставку пакетов каждому адресату

Доказательство.

Завершаемость и корректность значений $r_s[d]$ следуют из корректности алгоритма Флойда-Уоршелла

Корректность значений $\tau_s[d]$ следует из того, что они изменяются непосредственно после изменения соответствующих $r_s[d]$, и при изменении в $\tau_s[d]$ присваивается следующий узел в пути веса $r_s[d]$

Гарантия доставки пакетов обеспечивается леммой об отсутствии циклов и леммой об ациклических таблицах ▼

Алгоритм Туэга

К сожалению, алгоритм Туэга, согласно рассказанному сейчас в лекциях, нереалистичен из-за команды $\mathrm{broadcast}$

Осмыслить эту команду как реалистичную помогут обсуждающиеся позже волновые алгоритмы, но пока не будем использовать их в аргументации

Тогда, чтобы избежать нереалистичности, можно использовать следующее наблюдение

Если для опорного узла v верно $r_s[v] = \infty$, то для каждого узла d верно $r_s[v] + r_v[d] = \infty \geq r_s[d]$, и в (3) при выборе такого опорного узла v таблица маршрутизации s на этой итерации цикла (3) не изменяется

Поэтому выполнение $\mathrm{broadcast}(r_s)$ в (3.2) можно заменить на распространение r_s по каналам текущего дерева Γ_v от корня:

- Узел v отправляет r_v всем своим детям в Γ_v
- Каждый другой узел Γ_v, получив r_v, пересылает это значение всем своим детям в Γ_v

Алгоритм Туэга

В начале (3) с опорной вершиной v каждый узел s, для которого верно $d_s[v] < \infty$, знает своего родителя в Γ_v, но не знает детей для отправки r_v

Чтобы каждый узел узнал о своих детях в Γ_v, достаточно «заставить» каждый узел w послать всем своим соседям сообщение о том, является ли этот сосед родителем узла w в Γ_v

Получив такие сообщения от всех соседей, каждый узел s узнаёт о всех своих детях в Γ_v

Алгоритм Туэга

Инициализация в узле s (*$Init_s$*):

1. $W_s := \emptyset$;

2. Для всех $d \in V$:

   2.1 Если $d = s$:

      2.1.1 $r_s[d] := 0$;
      2.1.2 $\tau_s[d] := \bot$;

   2.2 Если $d \in Neigh_s$:

      2.2.1 $r_s[d] := \omega_{(s,d)}$;
      2.2.2 $\tau_s[d] := d$;

   2.3 Иначе:

      2.3.1 $r_s[d] := \infty$;
      2.3.2 $\tau_s[d] := \bot$;

Алгоритм Туэга

Выявление детей в узле s для опорного узла v ($Children_s(v)$):

1. Для всех $w \in Neigh_s$:
   1.1 $\mathrm{send}_w(\mathbf{par}, v, (\tau_s[v] = w))$

2. $N_v := 0$; $Ch_s := \emptyset$;

3. Пока $N_v < |Neigh_v|$:
   3.1 $\mathrm{receive}_w(\underline{\mathbf{par}}, \underline{v}, b)$ от любого $w \in Neigh_v$
   3.2 Если b: $Ch_s := Ch_s \cup \{w\}$;
   3.3 $N_v := N_v + 1$;

Сообщение $(\mathbf{par}, v, \mathbb{t})$ от s к w означает, что w является родителем s в Γ_v, а $(\mathbf{par}, v, \mathbb{f})$ — что не является

Дети узла s в Γ_v — это все соседи s, которые отправили ему сообщение $(\mathbf{par}, v, \mathbb{t})$

Алгоритм Туэга

Уточнение таблиц маршрутизации в узле s для опорного узла v ($Recompute_s(v)$):

1. Если $r_s[v] < \infty$:
   1.1 Если $s \neq v$:
      1.1.1 $\mathrm{receive}_{\tau_s[v]}(\underline{\mathbf{tab}}, \underline{v}, r_v)$
   1.2 Для всех $w \in Ch_s$:
      1.2.1 $\mathrm{send}_u(\mathbf{tab}, v, r_v)$
   1.3 Для всех $d \in V$:
      1.3.1 Если $r_s[v] + r_v[d] < r_s[d]$:
      $r_s[d] := r_s[v] + r_v[d]$;
      $\tau_s[d] := \tau_s[v]$;

Узел v располагает таблицей r_v и отсылает её всем детям в Γ_v

Каждый другой узел получает r_v от родителя (и теперь может её использовать) и пересылает детям

Следовательно, каждый узел из Γ_v рано или поздно выполнит (1.3), располагая таблицей r_v

Алгоритм Туэга

Алгоритм Туэга (полный): каждому узлу s отвечает следующий код

1. $Init_s$
2. Пока $W_s \neq V$:
   2.1 Выбрать $v \in V \setminus W_s$
   (опорный узел, общий для всех узлов сети)
   2.2 $Children_s(v)$
   2.3 $Recompute_s(v)$
   2.4 $W_s := W_s \cup \{v\}$;

Алгоритм Туэга

Теорема (корректность). **Любое вычисление алгоритма Туэга в основных допущениях конечно, в последней его конфигурации для любых узлов s, d верно**

- $r_s[d] = \rho[s, d]$ **и**
- **если** $\rho[s, d] < \infty$ **и** $s \neq d$, **то** $\tau_s[d] = table_s[d]$**,**

и если граф G связен, то таблицы τ_s в последней конфигурации гарантируют доставку пакетов каждому адресату

Доказательство. Следует из

- корректности упрощённого алгоритма Туэга,
- корректности процедуры $Children_s(v)$ (*см. ниже*): после её выполнения Ch_s — это множество всех детей s в Γ_v — и
- пояснений об особенностях выполнения кода, сделанных непосредственно после кода

Корректность процедуры $Children_s(v)$ следует из определения дерева Γ_v и того, что узел w — ребёнок узла s в этом дереве $\Leftrightarrow$ w — сосед s и s — родитель w ▼

Алгоритм Туэга

Теорема (сложность). **Алгоритм Туэга имеет коммуникационную сложность $O(nm)$ и битовую сложность $O(n^3 w)$, где $n = |V|$, $m = |E|$ и w — число битов, используемое для записи имени вершины и веса пути. Кроме того, при выполнении алгоритма**

- **в каждый канал отправляется $O(n)$ сообщений и $O(n^2 w)$ битов и**
- **для хранения всех текущих значений в узле используется $O(nm)$ битов памяти**

Доказательство.

Для каждой опорной вершины v в каждый канал отправляются

- 2 сообщения типа **par** (по одному в каждом направлении) и
- не более 1 сообщения типа **tab**

Сообщение типа **par** содержит $O(w)$ битов, типа **tab** — $O(nw)$ битов

Всего перебирается n опорных вершин

Из этого следуют оценки сложности для канала

Алгоритм Туэга

Теорема (сложность). Алгоритм Туэга имеет коммуникационную сложность $O(nm)$ и битовую сложность $O(n^3 w)$, где $n = |V|$, $m = |E|$ и w — число битов, использующееся для записи имени вершины и веса пути. Кроме того, при выполнении алгоритма

- **в каждый канал отправляется $O(n)$ сообщений и $O(n^2 w)$ битов и**
- **для хранения всех текущих значений в узле используется $O(nm)$ битов памяти**

Доказательство.

Самые объёмные единовременно хранящиеся данные: r_s, r_v, τ_s — содержат $O(n)$ значений размера w, откуда следует оценка использующихся битов памяти $O(nm)$

Коммуникационная сложность получается из сложности $O(n)$ для одного канала домножением на число каналов m

Алгоритм Туэга

Теорема (сложность). **Алгоритм Туэга имеет коммуникационную сложность $O(nm)$ и битовую сложность $O(n^3w)$, где $n = |V|$, $m = |E|$ и w — число битов, использующееся для записи имени вершины и веса пути. Кроме того, при выполнении алгоритма**

- **в каждый канал отправляется $O(n)$ сообщений и $O(n^2w)$ битов и**
- **для хранения всех текущих значений в узле используется $O(nm)$ битов памяти**

Доказательство.

Битовая сложность

При выполнении алгоритма суммарно в каналы отправляется $2nm$ сообщений типа **par**: оценка для одного канала, помноженная на число каналов

Размер каждого такого сообщения — $O(w)$

Суммарное число битов в таких сообщениях: $O(nmw)$

С учётом известного неравенства для графов $m \leq n^2$ — $O(n^3w)$

Алгоритм Туэга

Теорема (сложность). **Алгоритм Туэга имеет коммуникационную сложность $O(nm)$ и битовую сложность $O(n^3w)$, где $n = |V|$, $m = |E|$ и w — число битов, использующееся для записи имени вершины и веса пути. Кроме того, при выполнении алгоритма**

- **в каждый канал отправляется $O(n)$ сообщений и $O(n^2w)$ битов и**
- **для хранения всех текущих значений в узле используется $O(nm)$ битов памяти**

Доказательство.

Битовая сложность

При выполнении алгоритма суммарно в каналы отправляется не более n^2 сообщений типа **tab**: n опорных вершин, и для каждой — не более чем $(n-1)$ (количество рёбер в дереве Γ_v)

Размер каждого такого сообщения — $O(nw)$

Суммарное число битов: $O(n^2nw) = O(n^3w)$

Сложив оценки для **par** и типа **tab**, получим оценку $O(n^3w)$ ▼

Алгоритм Туэга

Д.з. 1. Зачем в алгоритме Туэга во всех сообщениях передаётся имя v опорной вершины? Можно ли не передавать v хотя бы в каких-нибудь из сообщений? Если нет, то почему алгоритм перестанет быть корректным?

Д.з. 2. Можно ли модифицировать алгоритм так, чтобы не передавать сообщения ($\mathbf{par}, v, \mathbb{f}$), мотивируя это тем, что узел может по умолчанию полагать, что у него нет детей? Если нет, то почему алгоритм перестанет быть корректным?

Алгоритм Туэга

Алгоритм Туэга

- относительно прост,
- имеет невысокую сложность и
- Вычисляет веса всех оптимальных путей

Но он имеет и **недостатки**:

- При изменении топологии сети требуется перевычислять всё «с ноля»
- Должны быть заранее согласованы множество V и порядок выбора опорных вершин
- При перевычислении значений r_s используется таблица r_v, которую могут не знать ни узел s, ни его соседи, и в худшем случае следует распространить эту таблицу по всей сети