Лекция 3. Деревья. Остовные деревья. Число остовных деревьев в помеченном полном графе. Достижимость промежуточного числа висячих вершин в остовном дереве. Оценка числа висячих вершин в остовном дереве.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции: http://mk.cs.msu.ru → Спецкурсы → Графы и их приложения

Дерево

Деревом называется связный граф без циклов.

Остовным деревом связного графа называется его подграф со всеми вершинами, являющийся деревом.

Задача о сети

Пусть найдутся p узлов, между некоторыми из которых можно проложить соединения. Как связать все узлы в сеть, чтобы общая протяженность соединений была наименьшей?

Число остовных деревьев в полном графе

Полный граф K_n — граф с n вершинами, в котором любые две различные вершины соединены ребром.

Теорема 1 (А. Кэли, 1889). *В помеченном полном графе K_n найдется ровно n^{n-2} остовных деревьев.*

Доказательство (Х. Прюфер, 1918). Пусть $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для каждого остовного дерева $D = D_1$ графа K_n построим его код $k(D_1) = (j_1, \ldots, j_{n-2})$.

Пусть i_1 — висячая вершина с наименьшей пометкой в дереве D_1. Она смежна с единственной вершиной j_1.

Повторим рассуждения для дерева $D_2 = D_1 - i_1$ и т. д.

Останавливаемся, когда получим дерево D_{n-1}, являющееся ребром.

Число остовных деревьев в полном графе

Доказательство (продолжение). Пусть получен код $k(D_1) = (j_1, \ldots, j_{n-2})$.

Как по нему восстановить дерево D_1?

Заметим, что если i не содержится в коде $k(D_1)$, то i — висячая вершина дерева D.

Пусть $V_1 = V$. Выбираем наименьшее число i_1 из V_1, не содержащееся в $k(D_1)$. Соединяем вершины i_1 и j_1. Пусть $V_2 = V_1 \setminus \{i_1\}$.

Повторяем рассуждения для множества V_2 и кода $(j_2, \ldots, j_{n-2})$.

Отметим, что множество V_{n-1} содержит ровно две вершины. Их нужно соединить ребром. Получим дерево D_1.

Число остовных деревьев в полном графе

Доказательство (продолжение). Значит, число остовных деревьев в графе K_n совпадает с числом кодов $(j_1, \dots, j_{n-2})$, где $j_1, \dots, j_{n-2} \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Т. е. число таких остовных деревьев равно n^{n-2}.

$\square$

Достижимость промежуточного числа висячих вершин

Теорема 2 (С. Чустер, 1983). *Пусть D_1 и D^* — два остовных дерева связного графа G с m и n висячими вершинами соответственно ($m < n$). Тогда для каждого числа k, $m < k < n$, в графе G найдется остовное дерево с k висячими вершинами.*

Доказательство. Пусть $e_1^* \in E(D^*) \setminus E(D_1)$. Рассмотрим граф $G_1 = D_1 + e_1^*$. В нем найдется единственный простой цикл C_1. В этом цикле выберем ребро $e_1 \notin D^*$, и положим $D_2 = G_1 - e_1$. Граф D_2 — дерево, повторим для него рассуждения и т. д.

В итоге получим последовательность остовных деревьев $D_1, D_2, \ldots, D^*$.

Заметим, что число висячих вершин в соседних деревьях D_i и D_{i+1} отличается не более, чем на 2.

Достижимость промежуточного числа висячих вершин

Доказательство (продолжение). Пусть для некоторого k, $m < k < n$, в последовательности остовных деревьев нет дерева с k висячими вершинами.

Значит, найдутся два соседних дерева D_i и D_{i+1}, такие, что в дереве D_i — $(k-1)$ висячих вершин, а в дереве D_{i+1} — $(k+1)$ висячих вершин.

Рассмотрим простой цикл C_i в графе G_i. Концы ребра e_i^* имеют степень больше двух, а концы ребра e_i имеют степень два в цикле C_i. Значит, в цикле C_i найдется такое ребро e, что один его конец имеет стень два, а другой его конец имеет степень, большую двух.

Тогда дерево $D = G_i - e$ — остовное дерево с k висячими вершинами в графе G.

□

Число висячих вершин

Сколько висячих вершин может быть в остовном дереве графа G?

Предложение 1. *Для каждого связного графа G можно построить остовное дерево, в котором не менее $\Delta(G)$ висячих вершин.*

Доказательство. Построим остовное дерево так: сначала выберем вершину $v \in V$ с $d_G(v) = \Delta(G)$ вместе со всеми исходящими из нее ребрами.

Затем добавим к этой звезде ребра графа G так, чтобы не появились циклы. В итоге получим остовное дерево, в котором не менее $\Delta(G)$ висячих вершин.

$\square$

Задача о сети с концевыми узлами

Пусть найдутся p узлов, между некоторыми из которых можно проложить соединения. Как связать все узлы в сеть, чтобы число концевых узлов осталось наибольшим (например, к концевым узлам подсоединяются пользователи)?

Оценка числа висячих вершин

Теорема 3 (Д. Клейтман, Д. Вест, 1991). *В связном графе $G = (V, E)$ с $\delta(G) \geqslant 3$ найдется остовное дерево, в котором не менее $|V|/4$ висячих вершин.*

Доказательство. Опишем алгоритм построения такого остовного дерева.

Пусть дерево D — подграф графа G. Висячую вершину дерева D назовем **устойчивой**, если все смежные с ней вершины принадлежат также дереву D.

Пусть $v(D)$ — число вершин, $u(D)$ — число висячих вершин и $s(D)$ — число устойчивых висячих вершин дерева D.

Положим $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$.

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение).
Остовное дерево будем строить по индукции.

Базис индукции: выберем в графе G произвольную вершину v. Пусть дерево D_1 состоит из вершины v вместе со всеми исходящими из нее ребрами и их вторыми концами.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$ и $d_G(v) \geqslant 3$, верно

$$\alpha(D_1) \geqslant 3d_G(v)/4 - (d_G(v) + 1)/4 = d_G(v)/2 - 1/4 \geqslant 5/4 > 0.$$

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение). Пусть уже построено дерево D_i, и $W = V \setminus V(D_i)$.

1. Если в дереве D_i есть невисячая вершина v, смежная с некоторой вершиной $w \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w)$.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geqslant 3/4 - 1/4 = 1/2.$$

Оценка числа висячих вершин

2. Иначе, если в дереве D_i есть вершина v, смежная с хотя бы с двумя вершинами $w_1, w_2 \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w_1) + (v, w_2)$.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geqslant 3/4 - 2 \cdot (1/4) = 1/4.$$

Оценка числа висячих вершин

3. Иначе, если в множестве W есть вершина w, смежная с какой-то вершиной v дерева D_i и хотя бы двумя вершинами $w_1, w_2 \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w) + (w, w_1) + (w, w_2)$.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geqslant 3/4 - 3 \cdot (1/4) = 0.$$

Оценка числа висячих вершин

4. Иначе, в множестве W есть вершина w, смежная с вершинами дерева D_i. т. к. п. 3 не выполняется, то вершина w смежна не более, чем с одной вершиной из множества W. Но $d_G(v) \geqslant 3$, поэтому вершина w смежна хотя бы с двумя вершинами $v, v_1 \in V(D_i)$. Пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w)$. т. к. п.п. 1–2 не выполняются, вершина v_1 — висячая в дереве D_i и смежна рово с одной вершиной из множества W, а именно, с вершиной w. Поэтому в дереве D_{i+1} висячая вершина v_1 — устойчивая.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geqslant 1/4 - 1/4 = 0.$$

Оценка числа висячих вершин

5. Если п.п. 1–4 неприменимы, то остовное дерево D построено.

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение). В остовном дереве D все висячие вершины устойчивые.

Поэтому, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D) = u(D) - v(D)/4.$$

Или

$$u(D) = v(D)/4 + \alpha(D).$$

Но $\alpha(D) \geqslant \alpha(D_1) > 0$, т. к. на каждом шаге построения мы только увеличивали этот параметр.
Получаем, что

$$u(D) \geqslant |V|/4.$$

$\square$

Краткий итог лекции

1. В любом связном графе найдется остовное дерево с промежуточным числом висячих вершин (относительно двух других его остовных деревьев).

2. В любом связном графе G с $\delta(G) \geqslant 3$ найдется остовное дерево с не менее, чем с четвертью, висячих вершин.

3. Остовные деревья в п. п. 1–2 можно найти быстрыми (полиномиальными) алгоритмами.

Задачи

1. Найти все неизоморфные остовные деревья в графе G, если:

1) $G = K_3$;
2) $G = K_4$;
3) $G = K_4 - e$, где e — произвольное ребро графа K_4;
4) $G = K_5$.

Изобразить эти неизоморфные остовные деревья.

2. Построить пример связного графа G_n с n вершинами, $n = 4m$, $m \geqslant 1$, в котором степени всех вершин равны 3 и любое остовное дерево содержит не более $m + 2$ висячих вершин.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 59.

2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 183.

3. Оре О. Теория графов. М.: Мир, 1980. С. 77–80.

Конец лекции