Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 40

Определения и выразимость

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Вступление

Вспомним пример, с которого начиналось обсуждение аксиоматических теорий:

Утверждение. $1 + 1 = 2$
Определение. $2 = \mathbf{s}(1)$
Определение. $1 = \mathbf{s}(0)$
...

Интуиция подсказывает, что можно упростить доказательство утверждения, подставив в утверждение определения чисел 1 и 2 (заменив исходную формулу на «$\mathbf{s}(0) + \mathbf{s}(0) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(0))$»)

Более того, кажется *интуитивно верным*, что любое натуральное число N можно выразить через 0 и $\mathbf{s}$ и использовать везде соответствующее выражение вместо N

Попробуем **математически строго** сформулировать и обосновать понятия и утверждения, лежащие в основе этих интуитивных догадок (определение, его подстановка, выражение чего-то через что-то)

Явные определения и выразимость

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{I} = \langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle$ сигнатуры σ

Будем говорить, что формулой $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ в $\mathcal{I}$ реализуется такое n-местное отношение P: $\quad P(\widetilde{d}^n) = \mathbb{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$

Определением отношения $P : D^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ в $\mathcal{I}$ будем называть формулу $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, реализующую P в $\mathcal{I}$

Графиком функции $f : D^n \to D$ называется отношение местности $(n + 1)$, содержащее те и только те наборы $(\widetilde{d}^n, d)$, для которых верно $f(\widetilde{d}^n) = d$

Определением функции $f : D^n \to D$ в $\mathcal{I}$ будем называть формулу $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}, \mathrm{y})$, реализующую график f в $\mathcal{I}$

Для технической простоты предмет будем считать 0-местной функцией

Понятиями (интерпретации $\mathcal{I}$) будем называть функции и отношения, определённые над предметной областью $\mathcal{I}$

Понятие ξ называется выразимым в интерпретации $\mathcal{I}$, если существует определение ξ в $\mathcal{I}$

Явные определения и выразимость

Примеры определений в интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, \mathbf{s}; =]$:

- Определение числа 2:
$$y = \mathbf{s}(\mathbf{s}(0))$$
- Определения числа 0:
$$y = 0$$
$$\forall x\ (y + x = x)$$
- Определение операции возведения в квадрат ($\_^2$):
$$y = x_1 \cdot x_1$$
- Определение отношения нестрогого неравенства ($\geq$):
$$\exists z\ (x_1 = x_2 + z)$$

Из существования определений чисел 2 и 0, операции $\_^2$ и отношения $\geq$ следует, что эти понятия **выразимы** в $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, \mathbf{s}; =]$

Определения такого вида повсеместно применяются в математике и имеют много названий: явные определения; сокращения; сокращающие определения; описательные определения; ...

Подстановка явных определений

Лемма (об определении отношения). **Пусть**

- $A(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}) = \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)$ **— атом,**
- $\psi(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{k})$ **— определение отношения** $\overline{\mathrm{P}}$ **в интерпретации** $\mathcal{I}$ **и**
- ψ' **— формула, равносильная** ψ **и такая что** **для неё правильна подстановка** $\theta = \{\mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/t_n\}$**.**

Тогда для любого набора предметов $\widetilde{d^n}$ **верно:**

$$\mathcal{I} \models A[\widetilde{d^n}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi'\theta[\widetilde{d^n}]$$

Доказательство.

$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d^n}]$

$\Leftrightarrow$ (по семантике правильной подстановки)

$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{k})[t_1[\widetilde{d^n}], \ldots, t_k[\widetilde{d^n}]]$

$\Leftrightarrow$ (по определению определения $\overline{\mathrm{P}}$ в $\mathcal{I}$)

$\mathcal{I} \models \psi[t_1[\widetilde{d^n}], \ldots, t_k[\widetilde{d^n}]]$

$\Leftrightarrow$ (по свойствам отношения равносильности)

$\mathcal{I} \models \psi'[t_1[\widetilde{d^n}], \ldots, t_k[\widetilde{d^n}]]$

$\Leftrightarrow$ (по семантике правильной подстановки)

$\mathcal{I} \models \psi'\theta[\widetilde{d^n}]$ ▼

Подстановка явных определений

Лемма (об определении функции). **Пусть**

- $A(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ **— атом, содержащий вхождение терма** $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k)$
- A_{z} **— атом, получающийся из** A **заменой обозначенного вхождения** $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k)$ **на переменную** z**, не содержащуюся в** A
- $\psi(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{k}, \mathrm{y})$ **— определение функции** $\bar{\mathbf{f}}$ **в интерпретации** $\mathcal{I}$ **и**
- ψ' **— формула, равносильная** ψ **и такая что для неё правильна подстановка** $\theta = \{\mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{k}/t_k, \mathrm{y}/\mathrm{z}\}$**.**

Тогда для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ **верно**

$$\mathcal{I} \models A[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \exists \mathrm{z}\, (\psi'\theta \,\&\, A_{\mathrm{z}})[\widetilde{d}^n]$$

Доказательство.

Аналогично доказательству предыдущей леммы, но технически сложнее, так что $\boxed{\text{можете попробовать доказать самостоятельно}}$

Подстановка явных определений

Для сигнатуры σ и символа s, входящего в σ, записью $\sigma^{-\mathrm{s}}$ обозначим сигнатуру, получающуюся из σ удалением символа s

Алгоритм подстановки определения

Вход:

- Формула φ сигнатуры $\sigma = \langle \mathsf{Const}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$
- Символ s сигнатуры σ
- Определение ψ понятия $\bar{\mathrm{s}}$ (в некоторой интерпретации $\mathcal{I}$)

Выход: формула $\mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)$ сигнатуры $\sigma^{-\mathrm{s}}$

Алгоритм:

1. Рассмотреть формулу $\chi = \varphi$
2. Если в χ не входит символ s, то $\mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi) = \chi$, а иначе:
   - 2.1 Выбрать вхождение атома A в χ, содержащее символ s
   - 2.2 Заменить это вхождение на формулу из соответствующей леммы:
     - если $\mathrm{s} \in \mathsf{Pred}$, то на $\psi'\theta$ из леммы об определении отношения
     - иначе — на $\exists \mathsf{z}\, (\psi'\theta \,\&\, A_{\mathsf{z}})$ из леммы об определении функции
   - 2.3 Вернуться в начало шага 2

Подстановка явных определений

Примеры

Подстановка определения отношения

$\exists z\,(x_1 = x_2 + z)$ на место предикатного символа $\geq^{(2)}$:

$$\forall x\,((1 \geq x)\,\&(x \geq z))$$

$$\mapsto$$

$$\forall x\,(\exists z\,(1 = x + z)\,\&\,(x \geq z))$$

$$\mapsto$$

$$\forall x\,(\exists z\,(1 = x + z)\,\&\,\exists u\,(x = z + u))$$

Подстановка определения функции

$y = x_1 \cdot x_1$ на место функционального символа $\_^2$:

$$\exists x\,(x^2 = y^2)$$

$$\mapsto$$

$$\exists x\,(\exists z_1\,(z_1 = x \cdot x\,\&\,z_1 = y^2))$$

$$\mapsto$$

$$\exists x\,(\exists z_1\,(z_1 = x \cdot x\,\&\,\exists z_2\,(z_2 = y \cdot y\,\&\,z_1 = z_2)))$$

Теорема о подстановке определения

Пусть

- $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ **— формула сигнатуры** σ**,**
- $\mathcal{I}$ **— интерпретация той же сигнатуры** σ**,**
- s **— символ сигнатуры** σ**,**
- ψ **— определение понятия** $\bar{\mathrm{s}}$ **в** $\mathcal{I}$**,**

Тогда для любого набора предметов $\widetilde{d}^{n}$ **верно:**

$$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^{n}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{-\mathrm{s}} \models \mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)[\widetilde{d}^{n}]$$

Здесь $\mathcal{I}^{-\mathrm{s}}$ — интерпретация, получающаяся из $\mathcal{I}$ удалением символа s и его оценки

Теорема о подстановке определения

Доказательство. $\quad (\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{-\mathrm{s}} \models \mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)[\widetilde{d}^n])$

Справедливость теоремы напрямую следует из двух фактов:

1. $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)[\widetilde{d}^n]$
2. $\mathcal{I} \models \mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{-s} \models \mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)[\widetilde{d}^n]$

Второй факт следует из того, что в $\mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)$ не содержится символ s

Осталось обосновать первый факт

По леммам об определениях отношения и функции, $\mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)$ получается из φ конечным числом замен подформул χ на χ' так, что:

$$\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \chi'[\widetilde{d}^n]$$

Следовательно, достаточно показать, что доказываемое утверждение верно, если $\mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)$ получается из φ одной такой заменой

Дальнейшее обоснование совпадает с доказательством теоремы о равносильной замене с рассмотрением заданной интерпретации $\mathcal{I}$ вместо произвольной ▼

Подстановка явных определений

Примеры

$$Ar[\mathbb{N}_0; 1; +; =, \geq] \models \forall \mathtt{x}\, ((1 \geq \mathtt{x})\, \& (\mathtt{x} \geq \mathtt{z}))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Ar[\mathbb{N}_0; 1; +; =] \models \forall \mathtt{x}\, (\exists \mathtt{z}\, (1 = \mathtt{x} + \mathtt{z})\, \&\, \exists \mathtt{u}\, (\mathtt{x} = \mathtt{z} + \mathtt{u}))$$

$$Ar[\mathbb{N}_0; ; ; =, \cdot, \_^2] \models \exists \mathtt{x}\, (\mathtt{x}^2 = \mathtt{y}^2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Ar[\mathbb{N}_0; ; ; =, \cdot] \models \exists \mathtt{x}\, (\exists \mathtt{z}_1\, (\mathtt{z}_1 = \mathtt{x} \cdot \mathtt{x}\, \&\, \exists \mathtt{z}_2\, (\mathtt{z}_2 = \mathtt{y} \cdot \mathtt{y}\, \&\, \mathtt{z}_1 = \mathtt{z}_2)))$$

Ещё несколько определений напоследок

В интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, \mathbf{s}; =]$ выразимы, в числе прочего:

- любое наперёд заданное натуральное число N:
$$\mathrm{y} = \underbrace{\mathbf{s}(\mathbf{s}(\ldots\mathbf{s}}_{N\text{ раз}}(0)\ldots))$$
- свойство $\mathrm{div}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ «x_1 является делителем x_2»:
$$\exists \mathrm{z}\ (\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{z})$$
- операция вычисления наибольшего общего делителя:
$$\mathrm{div}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_1)\,\&\,\mathrm{div}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2)\,\&\,\forall \mathrm{u}\ (\mathrm{div}(\mathrm{u}, \mathrm{x}_1)\,\&\,\mathrm{div}(\mathrm{u}, \mathrm{x}_2) \to \mathrm{div}(\mathrm{u}, \mathrm{y}))$$
- свойство even чётности чисел:
$$\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} \cdot 2)$$
- свойство prime простоты чисел:
$$\forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ ((\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} \cdot \mathrm{z}) \to (\mathrm{y} = 1) \vee (\mathrm{z} = 1))$$
- свойство согласованности числá x с гипотезой Гольдбаха:
$$\mathrm{even}(\mathrm{x})\,\&\,(\mathrm{x} \geq 4) \to \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{z}\ (\mathrm{prime}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{prime}(\mathrm{z})\,\&\,(\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z}))$$