Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2017, весенний семестр

Лекция 10

Аксиоматические теории

Теория частичных порядков

Основные свойства теорий: непротиворечивость, разрешимость, независимость, полнота

Теория равенства

Исчисление предикатов

Теорема Гёделя о полноте

Вступление: логика, смысл и эффективность

Рассмотрим такое предложение φ:

$$\mathbf{2}{\times}\mathbf{2}{=}\mathbf{4}$$

Что мы можем сказать про эту формулу, если применим изученные логические методы исследования “в лоб”?

$\mathbf{2}$, $\mathbf{4}$ — константы, $\times$ — функциональный символ, $=$ — предикатный символ

$\Vdash \varphi$, так как “естественная” арифметическая целочисленная интерпретация — модель для φ

Для этой формулы есть и другие модели:

$$\overline{\mathbf{2}} = \mathbf{t}, \quad \overline{\mathbf{4}} = \mathbf{f}, \quad \overline{\times} = \oplus, \quad \overline{\text{“}{=}\text{”}} = \text{“}{=}\text{”}$$

При этом есть интерпретации, не являющиеся моделями для φ:

$$\overline{\mathbf{2}} = 2, \quad \overline{\mathbf{4}} = 4, \quad \overline{\times} = \times, \quad \overline{\text{“}{=}\text{”}} = \text{“}{\neq}\text{”}$$

Значит, $\not\models \varphi$

Вступление: логика, смысл и эффективность

Рассмотрим такое предложение φ:

$$\mathbf{2{\times}2{=}4}$$

В конечном итоге после применения изученных методов легко получаем такие два факта:

$$\VDash \varphi, \qquad \nvDash \varphi$$

И где же здесь естественная арифметическая интерпретация?

Попробуем уточнить понятия выполнимости и общезначимости так, чтобы

- от устройства “плохих” интерпретаций ничего не зависело
- выполнимость/общезначимость констатировалась для “хороших” интерпретаций

Вступление: логика, смысл и эффективность

Задача проверки логического следования формулируется так:

$(\Gamma \subseteq \mathsf{CForm},\ \varphi \in \mathsf{CForm})$

$$\Gamma \overset{?}{\models} \varphi$$

Как это расшифровывается:

верно ли, что всякая модель для Γ
является также моделью для φ?

Если придумать множество предложений Γ_{ar} с **единственной** моделью — естественной арифметической интерпретацией[1], то задачу "верно ли, что дважды два — четыре?" можно переформулировать так:

$$\Gamma_{ar} \overset{?}{\models} \mathbf{2{\times}2{=}4}$$

[1] Ничто не мешает немного пофантазировать, не задумываясь о том, можно ли соорудить такое множество предложений

Вступление: логика, смысл и эффективность

Если теперь, имея множество Γ_{ar}, проверять логическое следование других формул

$$\Gamma_{ar} \overset{?}{\models} \varphi_1$$
$$\Gamma_{ar} \overset{?}{\models} \varphi_2$$
$$\Gamma_{ar} \overset{?}{\models} \varphi_3$$
$$\dots\ ,$$

то **каждая** из проверок будет иметь одну и ту же содержательную трактовку:

верно ли утверждение φ_i, сформулированное в естественной арифметической интерпретации?

И что же здесь такого особенного, чего не было раньше в лекциях?

Вступление: логика, смысл и эффективность

$$\Gamma \overset{?}{\models} \varphi$$

Логическое следование можно проверить сведением к проблеме общезначимости с применением одного из методов проверки общезначимости формул

Недостаток такого способа проверки: **никак** не учитывается та специфика рассматриваемых “хороших” интерпретаций, на основе которой мы определяли множество Γ

Чем более общий метод применяется
для решения задачи,
тем менее эффективно он работает

Если выбрано множество Γ (*или множество хороших интерпретаций*), то можно попытаться разработать **эффективный** алгоритм решения задачи специально для множества Γ

Теория частичных порядков

Попробуем доказать, используя логические методы, такое утверждение:

ни для какого (строгого) частичного порядка $<$ нельзя подобрать элементы x, y, такие что $\mathrm{x} < \mathrm{y} < \mathrm{x}$

"*Важное утверждение, которое мы хотим доказать*", часто называется **теоремой**

Самый простой способ записать эту теорему φ на языке логики предикатов выглядит так:

$$\neg\exists \mathrm{x}\; \exists \mathrm{y}\; (\mathrm{x} < \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{y} < \mathrm{x})$$

Здесь полагается, что предикатный символ $<$ имеет смысл "произвольный частичный порядок"

А как учесть этот смысл, оставаясь в рамках логики?

Вам должны быть известны **аксиомы** частичного порядка:

- антирефлексивность (ψ_1): $\forall \mathrm{x}\; \neg \mathrm{x} < \mathrm{x}$
- транзитивность (ψ_2): $\forall \mathrm{x}\; \forall \mathrm{y}\; \forall \mathrm{z}\; (\mathrm{x} < \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{y} < \mathrm{z} \rightarrow \mathrm{x} < \mathrm{z})$

Теория частичных порядков

$$\begin{array}{ll} \varphi: & \neg\exists \mathtt{x}\, \exists \mathtt{y}\, (\mathtt{x} < \mathtt{y} \,\&\, \mathtt{y} < \mathtt{x}) \\ \psi_1: & \forall \mathtt{x}\, \neg \mathtt{x} < \mathtt{x} \\ \psi_2: & \forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, \forall \mathtt{z}\, (\mathtt{x} < \mathtt{y} \,\&\, \mathtt{y} < \mathtt{z} \to \mathtt{x} < \mathtt{z}) \end{array}$$

Чтобы **доказать** сформулированную теорему, достаточно проверить справедливость соотношения

$$\psi_1, \psi_2 \models \varphi$$

При доказательстве любой другой теоремы, использующей только понятие частичного порядка, в левой части логического следования будет стоять то же самое множество аксиом

$$\mathcal{T}_< = \{\psi_1, \psi_2\}$$

Множество $\mathcal{T}_<$ образует

аксиоматическую теорию частичных порядков

Аксиоматические теории

Выберем сигнатуру σ алфавита логики предикатов

Теория[1] $\mathcal{T}$ сигнатуры σ — это множество предложений (*сигнатуры* σ)

Элементы теории называются аксиомами

Логические следствия теории $\mathcal{T}$ называются теоремами этой теории

Если теория ясна из контекста, то будем *теоремы теории* называть просто *теоремами*

[1] Полное название: аксиоматическая теория первого порядка

Аксиоматические теории

Формула φ общезначима в теории $\mathcal{T}$, если $\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — теорема

Другое название: $\mathcal{T}$-общезначима
Обозначение: $\models_{\mathcal{T}} \varphi$

Формула φ противоречива в теории $\mathcal{T}$, если формула $\neg\varphi$ $\mathcal{T}$-общезначима

Другие названия: невыполнима в теории $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$-противоречива, $\mathcal{T}$-невыполнима

Формула φ выполнима в теории $\mathcal{T}$, если она не является $\mathcal{T}$-противоречивой

Другое название: $\mathcal{T}$-выполнима
Обозначение: $|\!\models_{\mathcal{T}} \varphi$[1]

---

[1] Как и раньше, это обозначение необщеизвестно, его придумал я, чтобы сэкономить место на слайдах

Аксиоматические теории

Пример: теория частичных порядков

$$\mathcal{T}_< = \left\{ \begin{array}{c} \forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{x} < \mathrm{x} \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\mathrm{x} < \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{y} < \mathrm{z} \to \mathrm{x} < \mathrm{z}) \end{array} \right\}$$

Любое отношение частичного порядка антисимметрично:

$$\models_{\mathcal{T}_<} \neg(\mathrm{x}{<}\mathrm{y} \,\&\, \mathrm{y}{<}\mathrm{x})$$

Существует отношение частичного порядка со сравнимыми элементами:

$$|\!\models_{\mathcal{T}_<} \mathrm{x} < \mathrm{y}$$

Существует отношение частичного порядка, не содержащее сравнимых элементов:

$$\not\models_{\mathcal{T}_<} \mathrm{x} < \mathrm{y}$$

Аксиоматические теории

Проблема общезначимости формул в теории $\mathcal{T}$

для заданной формулы φ проверить её $\mathcal{T}$-общезначимость:

$$\overset{?}{\models}_{\mathcal{T}} \varphi$$

Проблема выполнимости формул в теории $\mathcal{T}$

для заданной формулы φ проверить её $\mathcal{T}$-выполнимость:

$$\overset{?}{|\!\models}_{\mathcal{T}} \varphi$$

А для каких теорий $\mathcal{T}$ решение поставленных проблем “разумно” и “полезно”?

- Насколько полезно уметь проверять выполнимость и общезначимость формул в теории частичных порядков?
- А в теории $\{\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\}$?

Откуда берутся теории

Аксиоматические теории возникают при попытке применить логические методы к областям математики, не основывающимся целиком на логике

Такие области можно получать, рассуждая от общего:

- рассматривается **общее** математическое понятие, имеющее много частных проявлений
  - *например, "частичный порядок"*
- описываются аксиомы этого понятия
  - то есть набор свойств, записанный в логических терминах и при этом необходимый и достаточный для определения понятия

Откуда берутся теории

Аксиоматические теории возникают при попытке применить логические методы к областям математики, не основывающимся целиком на логике

Такие области можно получать, рассуждая от частного:

- рассматривается набор **конкретных** математических понятий
  - например, функции сложения, умножения и отношение равенства целых чисел
- описывается набор свойств, как можно более **адекватно** описывающий устройство и взаимосвязь выбранных понятий

Основные свойства теорий

А как отличить “адекватные”/“разумные” теории от остальных?

Это зависит от того, с какими целями исследуется теория (*например, даже теория* $\{\forall x\ \exists y\ P(x,y)\}$ *может быть разумной, если мы обратили на неё внимание не просто так*)

Но при этом есть набор классических свойств, в той или иной степени описывающий адекватность теории:

- **непротиворечивость**
- **разрешимость**
- **независимость**
- **полнота**

Непротиворечивость, разрешимость

Понятия противоречивости и непротиворечивости теории $\mathcal{T}$ вам уже известна ($\mathcal{T}$ — *это множество предложений*)

Утверждение. Для любой противоречивой теории $\mathcal{T}$ и любого предложения φ верно $\models_{\mathcal{T}} \varphi$ и $\Vdash\!\models_{\mathcal{T}} \varphi$

Утверждение. Если $\mathcal{T}$ — непротиворечивая теория и $\models_{\mathcal{T}} \varphi$, то $\mid\!\models_{\mathcal{T}} \varphi$ и $\not\models_{\mathcal{T}} \neg\varphi$

Доказательство. Очевидно?

Все противоречивые теории **абсолютно бессмысленны**

(*а с непротиворечивыми нужно разбираться отдельно*)

Неплохо было бы уметь не только **описывать** задачи в логических терминах, но и **решать** их

Теория $\mathcal{T}$ разрешима, если проблема $\mathcal{T}$-общезначимости формул алгоритмически разрешима

Независимость

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1 : & \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\ \mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{y} + \mathrm{x}, \\ \varphi_2 : & \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{2}, \\ \varphi_3 : & \mathbf{3} = \mathbf{2} + \mathbf{1} \end{array} \right\}$$

Нельзя ли придумать теорию, имеющую тот же смысл, что и $\mathcal{T}$, но при этом меньшего размера?

Утверждение. **Пусть Γ — множество предложений и φ — предложение. Если $\Gamma \models \varphi$, то множества моделей для систем формул Γ и $\Gamma \cup \{\varphi\}$ совпадают**

Доказательство. Очевидно?

$\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$, а значит, смысл теорий $\mathcal{T}$ и $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ **совершенно одинаков**

Предложение φ независимо в теории $\mathcal{T}$, если $\mathcal{T} \not\models \varphi$

Теория $\mathcal{T}$ независима, если каждая аксиома φ теории $\mathcal{T}$ независима в $\mathcal{T} \setminus \{\varphi\}$

Полнота

Рассмотрим какую-либо интерпретацию $\mathcal{I}$ сигнатуры σ и теорию $\mathcal{T}$ той же сигнатуры

Представим себе, что теория $\mathcal{T}$ создавалась "от частного": смысл символов из σ, определяемый теорией $\mathcal{T}$, в точности совпадает со смыслом, задаваемым интерпретацией $\mathcal{I}$

Как можно сформулировать свойство теории $\mathcal{T}$ быть настолько адекватной интерпретации $\mathcal{I}$?

Вариант 1: $\mathcal{I}$ — **единственная модель теории** $\mathcal{T}$

Насколько разумным выглядит такое свойство теории?

Полнота

Интерпретации

$$\mathcal{I} = \left\langle \mathrm{D}_{\mathcal{I}}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \right\rangle \text{ и } \mathcal{J} = \left\langle \mathrm{D}_{\mathcal{J}}, \overline{\overline{\mathrm{Const}}}, \overline{\overline{\mathrm{Func}}}, \overline{\overline{\mathrm{Pred}}} \right\rangle$$

изоморфны, если существует взаимно-однозначное отображение

$$\tau : \mathrm{D}_{\mathcal{I}} \to \mathrm{D}_{\mathcal{J}},$$

такое что

- $\overline{\overline{\mathbf{c}}} = \tau(\overline{\mathbf{c}})$ $\qquad (\mathbf{c} \in \mathrm{Const})$
- $\overline{\overline{\mathbf{f}}}(\tau(d_1), \ldots, \tau(d_n)) = \tau(\overline{\mathbf{f}}(d_1, \ldots, d_n))$ $\qquad (\mathbf{f}^{(n)} \in \mathrm{Func};\ d_1, \ldots, d_n \in \mathrm{D}_{\mathcal{I}})$
- $\overline{\overline{\mathrm{P}}}(\tau(d_1), \ldots, \tau(d_n)) = \overline{\mathrm{P}}(d_1, \ldots, d_n)$ $\qquad (\mathrm{P}^{(n)} \in \mathrm{Pred};\ d_1, \ldots, d_n \in \mathrm{D}_{\mathcal{I}})$

Утверждение. **Если $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$ и интерпретация $\mathcal{J}$ изоморфна интерпретации $\mathcal{I}$, то $\mathcal{J} \models \mathcal{T}$**

Доказательство. Очевидно?

Полнота

Первый вариант формализации адекватности теории оказался неразумным: *любое непротиворечивое множество формул имеет бесконечно много моделей*

Вариант 2: **все модели теории $\mathcal{T}$ (*среди которых и* $\mathcal{I}$) изоморфны**

Такое свойство также оказывается не совсем разумным: из любой модели можно получить **неизоморфную** модель большей мощности, наполнив её предметами, имеющими тот же смысл, что и один из уже имеющихся[1]

Попробуем ослабить этот вариант формализации адекватности теории: *пусть теория $\mathcal{T}$ имеет какие угодно модели, лишь бы они не отличались "слишком сильно" от интерпретации $\mathcal{I}$*

---

[1] Вообще говоря, обоснование этого утверждения не так уж тривиально, но чтобы его оформить строго, нужно углубиться в теорию множеств, чего сейчас делать не хочется

Полнота

Вспомним, с какими задачами мы работаем:

$$\overset{?}{\models}_{\mathcal{T}} \varphi, \qquad \overset{?}{|\!\models}_{\mathcal{T}} \varphi$$

Если для любого предложения φ верно $\mathcal{I} \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathcal{J} \models \varphi$, то это означает, что интерпретация $\mathcal{J}$ *неотличима* от $\mathcal{I}$ с точки зрения выполнимости и общезначимости формул

Элементарная теория $\mathsf{Th}(\mathcal{I})$ интерпретации $\mathcal{I}$ — это множество предложений, истинных в $\mathcal{I}$:

$$\mathsf{Th}(\mathcal{I}) = \{\varphi \mid \varphi \in \mathsf{CForm},\ \mathcal{I} \models \varphi\}$$

Интерпретации $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ элементарно эквивалентны, если

$$\mathsf{Th}(\mathcal{I}) = \mathsf{Th}(\mathcal{J})$$

Вариант 3: **все модели теории $\mathcal{T}$ элементарно эквивалентны**

А действительно ли третий вариант формализации адекватности теории — “ослабление” второго?

Полнота

Утверждение

Любые изоморфные интерпретации элементарно эквивалентны

Доказательство. Очевидно?

Утверждение

Существуют неизоморфные элементарно эквивалентные интерпретации

Доказательство. Попробуйте самостоятельно

При решении проблем выполнимости и общезначимости формул совершенно неважно, как именно устроена интерпретация, которую хотелось описать теорией, важно лишь то, что истинно и что ложно в этой интерпретации

Алгоритм проверки истинности и ложности предложений в интерпретации применим и к любой элементарно эквивалентной интерпретации

Полнота

Теория $\mathcal{T}$ является полной, если для любого предложения φ верно хотя бы одно из соотношений: $\models_{\mathcal{T}} \varphi$, $\models_{\mathcal{T}} \neg\varphi$

Утверждение

Теория $\mathcal{T}$ полна тогда и только тогда, когда все её модели элементарно эквивалентны

Доказательство.

($\Rightarrow$): Рассмотрим предложение φ

Если $\models_{\mathcal{T}} \varphi$, то для любой модели $\mathcal{I}$ теории $\mathcal{T}$ верно: $\mathcal{I} \models \varphi$

Иначе $\models_{\mathcal{T}} \neg\varphi$, и для любой модели $\mathcal{I}$ теории $\mathcal{T}$ верно: $\mathcal{I} \models \neg\varphi$

($\Leftarrow$): Рассмотрим модель $\mathcal{I}$ теории $\mathcal{T}$ и предложение φ

Если $\mathcal{I} \models \varphi$, то для любой модели $\mathcal{J}$ теории $\mathcal{T}$ верно $\mathcal{J} \models \varphi$, а значит, $\models_{\mathcal{T}} \varphi$

Иначе $\mathcal{I} \models \neg\varphi$, а значит, для любой модели $\mathcal{J}$ теории $\mathcal{T}$ верно $\mathcal{J} \models \neg\varphi$, и тогда $\models_{\mathcal{T}} \neg\varphi$ ▼

Теория равенства

Рассмотрим сигнатуру, содержащую **только один символ**: предикатный символ $=^{(2)}$

Попытаемся построить теорию, описывающую интерпретацию $\mathcal{I}_=$, оценивающую символ $=^{(2)}$ как совпадение предметов

Какие аксиомы включить в такую теорию?

Можно назвать аксиомой любое необходимое свойство равенства, например,

- рефлексивность $\varphi_1 : \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{x} = \mathrm{x})$
- симметричность $\varphi_2 : \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (x = y \rightarrow y = x)$
- транзитивность $\varphi_3 : \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, (x = y \,\&\, y = z \rightarrow x = z)$

Теория равенства

$$\mathcal{T}_{=} = \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{x} = \mathrm{x}) \\ \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (x = y \to y = x) \\ \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, (x = y \,\&\, y = z \to x = z) \end{array} \right\}$$

Множество $\mathcal{T}_{=}$ принято называть теорией равенства

Посмотрим, насколько хорошей оказалась теория $\mathcal{T}_{=}$:

- непротиворечива ли?
- является ли $\mathcal{I}_{=}$ моделью?
- полна ли?
- разрешима ли?

Непротиворечивость, адекватность интерпретации $\mathcal{I}_{=}$

Утверждение. $\mathcal{I}_{=} \models \mathcal{T}_{=}$

Доказательство. Очевидно

Теория равенства

$$\mathcal{T}_= = \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} = \mathrm{x}) \\ \forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(x = y \to y = x) \\ \forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,\forall \mathrm{z}\,(x = y \,\&\, y = z \to x = z) \end{array} \right\}$$

Полнота

Правда ли, что любое предложение либо всегда истинно, либо всегда ложно в $\mathcal{T}_=$?

Утверждение

Теория равенства неполна

Доказательство.

$\not\models_{\mathcal{T}_=} \forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\;\mathrm{x} = \mathrm{y}$ и

$\not\models_{\mathcal{T}_=} \neg\forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\;\mathrm{x} = \mathrm{y}$ ▼

А что это означает?

Теория равенства

$$\mathcal{T}_{=} = \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} = \mathrm{x}) \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (x = y \to y = x) \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (x = y \,\&\, y = z \to x = z) \end{array} \right\}$$

Полнота

Можно ли коротко описать **все** модели теории $\mathcal{T}_{=}$?

Рефлексивность, симметричность и транзитивность — это аксиомы эквивалентности

Значит, моделями для $\mathcal{T}_{=}$ будут в точности все те интерпретации, в которых символ $=^{(2)}$ оценивается как произвольное **отношение эквивалентности**

Отношения эквивалентности могут обладать **совершенно разными** (*с точки зрения выполнимости формул логики предикатов*) свойствами, что и означает неполноту теории

Теория равенства

$$\mathcal{T}_= = \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} = \mathrm{x}) \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (x = y \to y = x) \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (x = y \,\&\, y = z \to x = z) \end{array} \right\}$$

Разрешимость

Опишем алгоритм проверки $\mathcal{T}_=$-общезначимости формул

Достаточно показать, как можно проверить $\mathcal{T}_=$-выполнимость произвольной формулы φ

Теорема о предварённой нормальной форме: без ограничения общности считаем, что φ — это предложение в ПНФ:

$$\varphi = Q_1 \mathrm{x}_1 \ \ldots Q_n \mathrm{x}_n \ Q\mathrm{z}\ M(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}, \mathrm{z})$$

Подробно разберём только один случай: $Q = \exists$ и $|\!\models_{\mathcal{T}_=} \varphi$

Теория равенства

$$\mathcal{T}_{=} = \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} = \mathrm{x}) \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (x = y \to y = x) \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (x = y \,\&\, y = z \to x = z) \end{array} \right\}$$

Разрешимость

Будем использовать такое сокращение: $Q\widetilde{d}^n$ — перебор наборов предметов $\widetilde{d}^n$ согласно семантике кванторов $\widetilde{Q}^n$

Например, если $Q_1 = \forall$ и $Q_2 = \exists$, то $Q\widetilde{d}^n =$ “для любого предмета d_1 существует предмет d_2, такой что ...”

Тогда $Q\widetilde{d}^n$ существует предмет d, такой что $M[\widetilde{d}^n, d] = \mathbf{true}$

Для каждого выбранного набора предметов $\widetilde{d}^n$ возможен только один из следующих случаев:

или $d = d_1$, ..., или $d = d_n$, или $d \neq d_1, \ldots, d \neq d_n$

Теория равенства

$$\mathcal{T}_= = \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathtt{x}\ (\mathtt{x} = \mathtt{x}) \\ \forall \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ (x = y \to y = x) \\ \forall \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ \forall \mathtt{z}\ (x = y \,\&\, y = z \to x = z) \end{array} \right\}$$

Разрешимость

Рассмотрим такую формулу ψ :

$$Q_1 \mathtt{x}_1 \ \ldots Q_n \mathtt{x}_\mathtt{n}\ (M\,\{\mathtt{z}/\mathtt{x}_1\} \vee \cdots \vee M\,\{\mathtt{z}/x_n\} \vee M'),$$

где M' получается из M так:

- заменим каждый атом $\mathtt{z} = \mathtt{z}$ на **true**
- заменим каждый оставшийся атом, содержащий $\mathtt{z}$, на **false**

Тогда

$$|\!\models_{\mathcal{T}_=} \psi \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models_{\mathcal{T}_=} \varphi$$

При этом формула ψ содержит на один квантор меньше, чем φ

Теория равенства

$$\mathcal{T}_{=} = \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} = \mathrm{x}) \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (x = y \to y = x) \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (x = y \,\&\, y = z \to x = z) \end{array} \right\}$$

Разрешимость

Удалив таким образом все кванторы, получим либо формулу **true**, либо формулу **false** — их $\mathcal{T}_{=}$-выполнимость и $\mathcal{T}_{=}$-невыполнимость очевидны

Только что было доказано

Утверждение

Теория равенства разрешима

Теория равенства

Теория равенства: $\mathcal{T}_= = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

$$\varphi_1\colon \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} = \mathrm{x})$$
$$\varphi_2\colon \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (x = y \to y = x)$$
$$\varphi_3\colon \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (x = y \,\&\, y = z \to x = z)$$

$\mathcal{T}_=$-общезначимая формула φ:

$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\neg \mathrm{x} = \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{y} = \mathrm{z} \to \neg \mathrm{x} = \mathrm{z})$$

φ — это **теорема**, которую можно сформулировать так:

каким бы ни были отношение эквивалентности $=$
и элементы x, y, z, верно следующее:
если $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ и $\mathrm{y} = \mathrm{z}$, то $\mathrm{x} \neq \mathrm{z}$

Обосновав логическое следование $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \varphi$, мы **доказали** эту теорему

Но где же это доказательство?

И что такое “доказательство”?

Исчисление предикатов

Математическое доказательство — это рассуждение, в ходе которого на основании некоторых утверждений рациональным способом получаются новые утверждения

Полученное утверждение считается обоснованным, если оно получено из обоснованных ранее утверждений и безусловно истинных утверждений с использованием законов логики

Например:

Доказанные утверждения:

$$1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$$

если $1 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$, то $1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1) \times ((n+1)+1)}{2}$

Закон логики: (*математическая индукция*)

$$\text{если } \mathrm{P}(\mathbf{1}) \text{ и } \forall \mathtt{n}\ (\mathrm{P}(\mathtt{n}) \to \mathrm{P}(\mathtt{n}+\mathbf{1})), \text{ то } \forall \mathtt{n}\ \mathrm{P}(\mathtt{n})$$

Новое доказанное утверждение:

$$\forall \mathtt{n}\ (1 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2})$$

Исчисление предикатов

А как записывать утверждения, и какие законы логики можно применять в доказательстве?

Утверждения можно записывать как **формулы логики предикатов**

Основные логические законы, обычно формулирующиеся для логики предикатов, — это:

- modus ponens

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

- правило обобщения

$$\frac{A}{\forall \mathrm{x}\ A}$$

А какие утверждения можно получать с помощью этих правил, и какие утверждения считать безусловно истинными?

Исчисление предикатов

В широком смысле, безусловно истинные утверждения — это общезначимые формулы

С помощью правила modus ponens и правила обобщения из общезначимых формул **обязательно** будут получаться общезначимые формулы (почему?)

Однако если считать, что **все** общезначимые формулы можно использовать в начале доказательства, то обоснованное получение новых общезначимых формул становится **бессмысленным**

В попытке наделить такой процесс доказательства в логике предикатов смыслом была выделена система

схем логических аксиом

Исчисление предикатов

Каждая схема аксиомы — это *почти* формула

Единственное отличие схемы аксиомы от формулы: на местах атомарных формул стоят пропозициональные символы

Схемой аксиомы описывается бесконечное множество аксиом: **общезначимых** формул, получаемых из схемы заменой пропозициональных символов на формулы

Как же могут выглядеть схемы аксиом логики предикатов?

Исчисление предикатов

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $A \mathbin{\&} B \to A$
4. $A \mathbin{\&} B \to B$
5. $A \to (B \to A \mathbin{\&} B)$
6. $A \to (A \vee B)$
7. $B \to (A \vee B)$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
9. $\neg A \to (A \to B)$
10. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
11. $A \vee \neg A$
12. $\forall \mathrm{x}\ A \to A\{\mathrm{x}/t\}$
    - переменная x должна быть свободна в формуле A для терма t
13. $A\{\mathrm{x}/t\} \to \exists \mathrm{x}\ A$
    - переменная x должна быть свободна в формуле A для терма t

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов определяется

- синтаксисом логики предикатов
- схемами аксиом 1–13
- правилами вывода:
  - modus ponens
  - правило обобщения

Что же доказывается в исчислении предикатов, и как выглядит доказательство?

Исчисление предикатов

В исчислении предикатов доказывается **общезначимость формул**

Доказательство формализуется как логический вывод: последовательность формул

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k,$$

где каждая формула φ_i получается

- из схемы аксиом подстановкой формул на места пропозициональных символов
  - (на место одинаковых символов подставляются одинаковые формулы)
- по правилу modus ponens
  - то есть существуют j, m ($j, m < i$), такие что $\varphi_m = \varphi_j \to \varphi_i$
- по правилу обобщения
  - то есть существует j ($j < i$), такое что $\varphi_i = \forall \mathtt{x}\ \varphi_j$, $x \in \mathsf{Var}$

Исчисление предикатов

Формула φ выводима в исчислении предикатов ($\vdash \varphi$), если существует логический вывод, оканчивающийся этой формулой

Теорема Гёделя о полноте
(*корректность и полнота исчисления предикатов*)

$$\vdash \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \varphi$$

Доказательство. ?

Это самая трудная задача для самостоятельного решения во всём курсе

Исчисление предикатов

А причём здесь аксиоматические теории?

Изначально аксиоматические теории вводились так:

- рассмотрим исчисление предикатов
- к логическим аксиомам (*множеству формул, определяемому схемами аксиом*) добавим аксиомы теории (*предложения, описывающие свойства символов сигнатуры*)
- формула выводима в теории ($\mathcal{T} \vdash \varphi$), если она может быть получена при посторении логичекого вывода, в котором аксиомы, получаемые из схем, дополнены аксиомами теории

После добавления аксиом теории $\mathcal{T}$ и замены общезначимости на $\mathcal{T}$-общезначимость теорема Гёделя о полноте ($\mathcal{T} \vdash \varphi \Leftrightarrow \models_{\mathcal{T}} \varphi$) остаётся справедливой (а так ли это?)

Тогда доказательством общезначимости формулы в теории может служить **логический вывод** этой формулы в теории

Исчисление предикатов

Краткие итоги

Теорема Гёделя о полноте: каждый математик, знакомый с логикой, должен хоть немного понимать, что это такое

- Теперь вы поняли хотя бы формулировку этой теоремы

Исчисление предикатов

Краткие итоги

Аксиоматическая теория: это логический способ формализации того, что в математике называется неопределяемым термином "теория"

- Теперь вы знаете,
  - как выглядит эта формализация,
  - что в такой формализации означают понятия "аксиома", "теорема", "доказательство" и другие понятия, на основе которых определяются механизмы работы математики
  - на каком основании можно одобрять одни теории и осуждать другие

Исчисление предикатов

Краткие итоги

Значок $\models$*:* возник ли у вас хоть раз в голове вопрос, зачем рисовать две горизонтальные черты, когда можно обойтись одной?

- Теперь вы и это знаете:
  - значок $\vdash$ общеизвестен как отношение выводимости формул, и он возник первым
  - значок $\vdash$ лаконичен и ёмок: вертикальной чертой разделяем “дано” и “получаем”, горизонтальной чертой тянемся к “получаем”
  - вслед за $\vdash$ возник семантический аналог этого значка — логическое следование $\models$, и чтобы сказать, что это очень похожие (*теорема Гёделя: в общем-то, одинаковые*), но разные понятия, создатели значка $\models$ просто дорисовали к $\vdash$ ещё одну чёрточку: “получаем, но не так, как раньше”

Конец лекции 10