

# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

## Блок 43

Модальные логики

Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

# Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Зима **всегда** близко

3: Зима **бывает** близко

*Если отбросить всё лишнее, то*

для высказывания 1 справедлива одна из двух оценок:

**правда**, если зима действительно близко, и

**неправда**, если это не так

Смысл высказываний 2 и 3 *тесно связан* со смыслом 1:

если  $x =$  «зима близко», то

1:  $x$

2: **всегда**  $x$

3: **иногда** бывает  $x$

# Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

- 1: Зима близко
- 2: Зима **всегда** близко
- 3: Зима **бывает** близко

Слова, используемые как уточнение истинностной оценки высказывания, называются **модальностями** (лат. *modus* — мера)

«**Всегда**» и «**иногда**» — это **темпоральные модальности** (модальности времени) (лат. *tempus* — время)

Можно сказать, что «**всегда**» и «**иногда**» — это  $\forall$  и  $\exists$ , но тогда:

- ▶ Какими предметами задаётся время, и каковы свойства этих предметов?
- ▶ Как устроить анализ смысла высказываний в интерпретациях с такими предметами?

# Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Я знаю, что зима близко

3: Я допускаю возможность того, что зима близко

Смысл высказываний 2 и 3 тесно связан со смыслом 1:

если  $x =$  «зима близко», то

1:  $x$

2: известно, что  $x$

3: допустимо  $x$

«Известно» и «допустимо» — это эпистемические модальности  
(модальности знания) (др.-греч. ἐπιστήμη — знание)

Если «известно» (всеобщее знание)

и «допустимо» (частное, некоторое знание) трактовать как  $\forall$  и  $\exists$ ,

то на какие «предметы знаний» указывают эти кванторы?

# Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: Зима близко

2: Зима **должна быть** близко

3: Зима **имеет право быть** близко

Смысл высказываний 2 и 3 *тесно связан* со смыслом 1:

если  $x =$  «зима близко», то

1:  $x$

2: **должно быть**  $x$

3: **имеет право быть**  $x$

«**Должен**» и «**имеет право**» — это **деонтические модальности**  
(**модальности долга**) (др.-греч.  $\delta\acute{\epsilon}\omicron\nu$  — *должное*)

Как связан смысл фраз «это так» и «это должно быть так»?

В *рациональных* высказываниях используется великое множество разных модальностей, и точно описать их смысл в рамках классической логики — очень непростая задача

# Модальности

Часто (*хотя и не всегда*) в высказываниях используются модальности двух двойственных видов:

## Модальность необходимого

необходимо  
обязательно  
всегда  
должен  
знает  
доказуемо  
□

## Модальность возможного

возможно  
не исключено  
иногда  
имеет право  
предполагает  
непротиворечиво  
◇

Хотелось бы иметь единообразный способ определения смысла модальностей □ и ◇ — и такой способ используется в

**модальных логиках**

# Модальные логики: синтаксис

Синтаксис **формул** пропозициональных модальных логик над множеством пропозициональных переменных  $\text{Var}$ :

$\varphi ::= x \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\Box\varphi) \mid (\Diamond\varphi)$  ,  
где  $\varphi$  — формула и  $x \in \text{Var}$

Это **синтаксис формул логики высказываний**, расширенный возможностью **расстановки модальностей необходимого и возможного** над любыми (под)формулами

**Приоритет операций:**  $\neg$ ,  $\Box$  и  $\Diamond$ ; затем  $\&$ ; затем  $\vee$ ; затем  $\rightarrow$

**Пример формулы:**  $\Diamond x \& \Box \neg \Diamond (x \vee y)$

«возможно  $x$ , и при этом необходимо невозможно, что  $x$  или  $y$ »

В этой формуле пока не говорится, что означают «необходимость» и «возможность»:  
определение этих понятий — часть **семантики** формулы

# Модальные логики: семантика Крипке

Описание семантики начнём с примера: **Зима всегда близко**

Представим себе любое строгое определение зимы и того, в каких случаях зима считается близкой

Если остановить время и задаться вопросом, близко зима или нет, то ответ на этот вопрос (**да** или **нет**) можно представить как значение пропозициональной переменной  $x$

Время течёт, и мир меняется, как и значение  $x$ :

сейчас  $\longrightarrow$  через минуту  $\longrightarrow$  через месяц  $\longrightarrow$  через полгода  
 $\neg x$   $\neg x$   $\neg x$   $x$

Ответ на вопрос « $\Box x$ ?» в так меняющемся мире — **нет**, не всегда  $x$

Изменение мира можно представить себе и по-другому:

существует много взаимосвязанных миров с разными значениями  $x$ , и в семантике  $\Box$  комбинируются значения  $x$  многих миров

# Модальные логики: семантика Крипке

**Модель Крипке** (над переменными  $\text{Var}$ ) — это система  $(W, \mapsto, L)$ , где

- ▶  $W$  — непустое множество **состояний** (или, по-другому, — **миров**)
- ▶  $\mapsto \subseteq W \times W$  — отношение **переходов** между мирами
  - ▶ Если  $w \mapsto w'$ , то  $w'$  — мир, **альтернативный** для  $w$  ( **$w$ -альтернатива**)
- ▶  $L : W \rightarrow 2^{\text{Var}}$  — оценка переменных для каждого мира
  - ▶ « $x \in L(w)$ » = «переменная  $x$  истинна в мире  $w$ »

**Шкала Крипке** (*Kripke frame*),

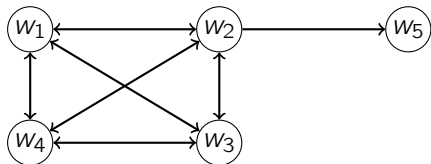
на которой **основывается** модель  $(W, \mapsto, L)$ , — это пара  $(W, \mapsto)$

Модель Крипке — это **интерпретация** для формул модальной логики

# Модальные логики: семантика Крипке

Например,

$(\text{Var} = \{a\})$



— это шкала Крипке

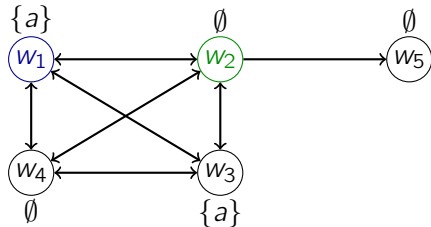
# Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости  $\models$  для модели  $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$  и мира  $w \in W$  определяется так:

- ▶  $\mathcal{I}, w \models x \Leftrightarrow x \in L(w)$  ( $x \in \text{Var}$ )
- ▶  $\mathcal{I}, w \models \varphi \ \& \ \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \models \varphi$  и  $\mathcal{I}, w \models \psi$
- ▶  $\mathcal{I}, w \models \varphi \ \vee \ \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \models \varphi$  или  $\mathcal{I}, w \models \psi$

Например,

( $\text{Var} = \{a\}$ )



— это модель Крипке ( $\mathcal{I}$ )

$\mathcal{I}, w_1 \models a$ ,       $\mathcal{I}, w_2 \not\models a$

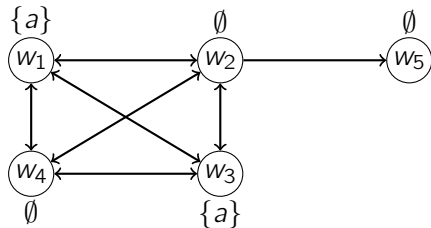
# Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости  $\models$  для модели  $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$  и мира  $w \in W$  определяется так:

- ▶  $\mathcal{I}, w \models \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \not\models \varphi$  или  $\mathcal{I}, w \models \psi$
- ▶  $\mathcal{I}, w \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathcal{I}, w \not\models \varphi$

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке ( $\mathcal{I}$ )

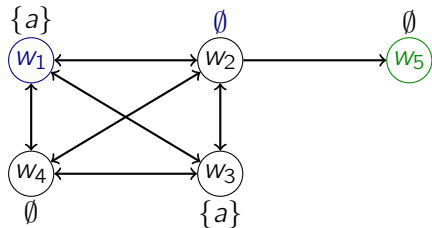
# Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости  $\models$  для модели  $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$  и мира  $w \in W$  определяется так:

- ▶  $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi \Leftrightarrow$   
для любой  $w$ -альтернативы  $w'$  верно  $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке ( $\mathcal{I}$ )

$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a,$        $\mathcal{I}, w_5 \models \Box a$

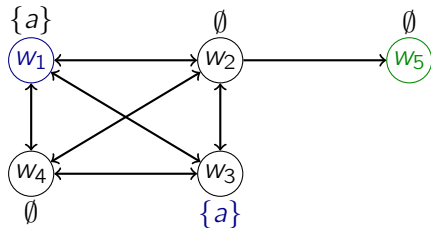
# Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости  $\models$  для модели  $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$  и мира  $w \in W$  определяется так:

- ▶  $\mathcal{I}, w \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow$   
существует  $w$ -альтернатива  $w'$ ,  
такая что верно  $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например,

(Var = {a})



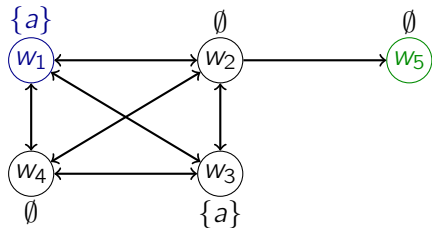
— это модель Крипке ( $\mathcal{I}$ )

$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a$ ,       $\mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond a$

# Модальные логики: семантика Крипке

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке ( $\mathcal{I}$ )

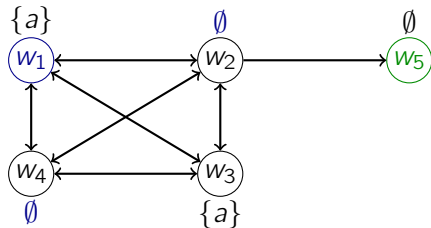
$\mathcal{I}, w_1 \models \Box \Diamond a$ ,

$\mathcal{I}, w_5 \models \Box \Diamond a$

# Модальные логики: семантика Крипке

Например,

(Var = {a})



— это модель Крипке ( $\mathcal{I}$ )

$\mathcal{I}, w_1 \not\models \diamond \Box a$ ,

$\mathcal{I}, w_2 \models \diamond \Box a$

,  $\mathcal{I}, w_5 \not\models \diamond \Box a$

# Модальные логики: семантика Крипке

Пусть  $\mathcal{F}$  — шкала Крипке,  $\mathcal{I}$  — модель Крипке, и  $\varphi, \psi$  — формулы модальной логики

Тогда

- ▶ формула  $\varphi$  **истинна в модели**  $\mathcal{I}$  ( $\mathcal{I} \models \varphi$ ), если для любого мира  $w$  модели  $\mathcal{I}$  верно  $\mathcal{I}, w \models \varphi$
- ▶ формула  $\varphi$  **истинна на шкале**  $\mathcal{F}$  ( $\mathcal{F} \models \varphi$ ), если для любой модели Крипке  $\mathcal{J}$ , основанной на  $\mathcal{F}$ , верно  $\mathcal{J} \models \varphi$
- ▶ формула  $\varphi$  **общезначима** ( $\models \varphi$ ), если для любой шкалы  $\mathcal{F}$  верно  $\mathcal{F} \models \varphi$
- ▶ формулы  $\varphi$  и  $\psi$  **равносильны** ( $\varphi \sim \psi$ ), если  $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

## Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

**Утверждение.** Для любой формулы  $\varphi$  верно:  $\Box\varphi \sim \neg\Diamond\neg\varphi$

**Доказательство.** «Для любой альтернативы верно  $\varphi$ » = «Не существует альтернативы, такой что не- $\varphi$ » ▼

**Утверждение.** Для любой формулы  $\varphi$  верно: если  $\models \varphi$ , то  $\models \Box\varphi$

**Доказательство.** Если  $\varphi$  выполняется в любом мире любой модели, то  $\varphi$  выполняется и в любой альтернативе любого мира любой модели ▼

# Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

**Утверждение.** Для любых формул  $\varphi$ ,  $\psi$  верно:

$$\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$$

Доказательство.

*Предположим от противного*, что  $\not\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

Тогда существуют модель  $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$  и мир  $w$ , такие что  $\mathcal{I}, w \not\models \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

Тогда по семантике  $\rightarrow$ :

- ▶  $\mathcal{I}, w \models \Box(\varphi \rightarrow \psi)$ , а значит, для каждой  $w$ -альтернативы  $w'$  верно  $\mathcal{I}, w' \models \varphi \rightarrow \psi$
- ▶  $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi$ , а значит, для каждой  $w$ -альтернативы  $w'$  верно  $\mathcal{I}, w' \models \varphi$  — и, по семантике  $\rightarrow$ ,  $\mathcal{I}, w' \models \psi$
- ▶  $\mathcal{I}, w \not\models \Box\psi$ , а значит, существует  $w$ -альтернатива  $w'$ , такая что  $\mathcal{I}, w' \not\models \psi$ , что *противоречит* предыдущему пункту ▼