Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 40

Моделирование машин Тьюринга
хорновскими логическими программами

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Чтобы показать, насколько широки вычислительные возможности ХЛП, опишем способ преобразования МТ $M = (\mathcal{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \pi)$ в ХЛП $\mathcal{P}_M$, особым образом воспроизводящую вычисления M

Символы из $\mathcal{A} \cup \mathcal{Q}$ будем использовать в ХЛП в качестве констант

Ленточному слову $w = \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k$ сопоста́вим список $\tau_w = \mathbf{a}_1\mathbf{.}\dots\mathbf{.a}_k\mathbf{.nil}$

w^- — так будем записывать зеркальный образ слова w: если $w = \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k$, то $w^- = \mathbf{a}_k \dots \mathbf{a}_1$

Конфигурации $\sigma = (\alpha, \mathbf{q}, \beta)$ МТ сопоста́вим список из трёх элементов $\tau_\sigma = (\tau_{\alpha^-})\mathbf{.q.}(\tau_\beta)\mathbf{.nil}$

Например, если $\sigma = (\mathbf{001}, \mathbf{q}, \mathbf{110})$, то $\tau_\sigma = (\mathbf{1.0.0.nil})\mathbf{.q.}(\mathbf{1.1.0.nil})\mathbf{.nil}$

В программе будем использовать только один предикатный символ p, вкладывая в него такой смысл: $\mathrm{p}(\tau_\sigma)$ = «σ — текущая конфигурация МТ M»

Каждой команде C МТ сопоста́вим два правила ХЛП $\mathcal{R}_C$, $\mathcal{S}_C$:

- Если $C = (\mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, R, \mathbf{p})$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_C = &\quad \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &\leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{b}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}); \\ \mathcal{S}_C = &\quad \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) &\leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{b}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}); \end{aligned}$$

  Напоминание:

$$\begin{aligned} (\alpha, \mathbf{q}, \mathbf{a}x\beta) &\quad \to_C \quad (\alpha\mathbf{b}, \mathbf{p}, x\beta) \\ (\alpha, \mathbf{q}, \mathbf{a}) &\quad \to_C \quad (\alpha\mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{\Lambda}) \end{aligned}$$

- Если $C = (\mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, L, \mathbf{p})$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_C = &\quad \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &\leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathtt{Y}.\mathbf{b}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}); \\ \mathcal{S}_C = &\quad \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &\leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{p}.(\mathtt{Y}.\mathbf{b}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}); \end{aligned}$$

  Напоминание:

$$\begin{aligned} (\alpha xy, \mathbf{q}, \mathbf{a}\beta) &\quad \to_C \quad (\alpha x, \mathbf{p}, y\mathbf{b}\beta) \\ (y, \mathbf{q}, \mathbf{a}\beta) &\quad \to_C \quad (\mathbf{\Lambda}, \mathbf{p}, y\mathbf{b}\beta) \end{aligned}$$

Лемма 1. **Для любых конфигурации σ, запроса $\mathcal{Q}$ и команды C верно:**

$?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \xrightarrow{\mathcal{R}_C} \mathcal{Q}$ **или** $?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \xrightarrow{\mathcal{S}_C} \mathcal{Q} \Leftrightarrow$

существует конфигурация σ', такая что $\mathcal{Q} = ?\mathrm{p}(\tau_{\sigma'})$ и $\sigma \to_C \sigma'$

Доказательство. Очевидно? (С учётом напоминаний)

Машине Тьюринга M с программой π сопоста́вим ХЛП $\mathcal{P}_M$, состоящую из правил $\mathcal{R}_C$ и $\mathcal{S}_C$ для всех $C \in \pi$ в любом порядке

Например, если $M = (\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \mathbf{0}, \{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_f\}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$, где

$$\pi(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, L, \mathbf{q}_1), \qquad \pi(\mathbf{q}_1, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, R, \mathbf{q}_f),$$
$$\pi(\mathbf{q}_0, \mathbf{1}) = (\mathbf{1}, R, \mathbf{q}_0), \qquad \pi(\mathbf{q}_1, \mathbf{1}) = (\mathbf{0}, L, \mathbf{q}_1),$$

то программа $\mathcal{P}_M$ содержит 8 правил:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});\\
&\mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});\\[1em]
&\mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_0.(\mathbf{1}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{1}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});\\
&\mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_0.(\mathbf{1}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{1}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil});\\[1em]
&\mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_1.(\mathbf{0}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_f.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});\\
&\mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_1.(\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_f.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil});\\[1em]
&\mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{1}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});\\
&\mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{1}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});
\end{aligned}$$

$\mathcal{Q}_1 \to_{\mathcal{P}} \mathcal{Q}_2$ — так будем обозначать тот факт, что хотя бы для одного правила $\mathcal{R}$ ХЛП $\mathcal{P}$ верно $\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}} \mathcal{Q}_2$

Лемма 2. **Для любых МТ M, её конфигурации σ и запроса $\mathcal{Q}$ верно:**
$?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \to_{\mathcal{P}_M} \mathcal{Q} \Leftrightarrow$
существует конфигурация σ', такая что $\mathcal{Q} = ?\mathrm{p}(\sigma')$ и $\sigma \to_M \sigma'$

Доказательство

$?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \to_{\mathcal{P}_M} \mathcal{Q}$

$\Leftrightarrow$ (по устройству $\mathcal{P}_M$)

$\exists$ команда C МТ M, такая что $?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \to_{\mathcal{R}_C} \mathcal{Q}$ или $?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \to_{\mathcal{S}_C} \mathcal{Q}$

$\Leftrightarrow$ (по лемме 1)

$\exists$ команда C МТ M и конфигурация σ', такая что $\mathcal{Q} = ?\mathrm{p}(\tau_{\sigma'})$ и $\sigma \to_C \sigma'$

$\Leftrightarrow$ (по определению $\to_M$)

$\exists$ конфигурация σ', такая что $\mathcal{Q} = ?\mathrm{p}(\tau_{\sigma'})$ и $\sigma \to_M \sigma'$ ▼

Теорема (о моделировании машин Тьюринга хорновскими ЛП). **Для любых МТ M и конфигурации σ последовательность запросов**

$$?\mathrm{p}(\tau_\sigma),\ ?\mathrm{p}(t_1),\ ?\mathrm{p}(t_2), \dots$$

является вычислением ХЛП $\mathcal{P}_M$ тогда и только тогда, когда существуют конфигурации $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, такие что

- $t_1 = \tau_{\sigma_1},\ t_2 = \tau_{\sigma_2}, \dots$ **и**
- $\sigma \to_M \sigma_1 \to_M \sigma_2 \to_M \dots$

Доказательство. Следует из леммы 2

Вычисление ХЛП, порождённое запросом $\mathcal{Q}$, будем для краткости называть вычислением на запросе $\mathcal{Q}$

Вычисление ХЛП назовём непродолжаемым, если оно успешное, тупиковое или бесконечное

Следствие. **Для любой МТ M и любой её конфигурации σ существует ровно одно непродолжаемое вычисление программы $\mathcal{P}_M$ на $?\mathrm{p}(\tau_\sigma)$**

Пример: $M = (\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}, \mathbf{0}, \{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_f\}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$, где

$$\pi(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, L, \mathbf{q}_1), \qquad \pi(\mathbf{q}_1, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, R, \mathbf{q}_f),$$
$$\pi(\mathbf{q}_0, \mathbf{1}) = (\mathbf{1}, R, \mathbf{q}_0), \qquad \pi(\mathbf{q}_1, \mathbf{1}) = (\mathbf{0}, L, \mathbf{q}_1),$$

$$\mathcal{P}_M: \begin{array}{lll}
1: & \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) & \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}); \\
2: & \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) & \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}); \\
3: & \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_0.(\mathbf{1}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) & \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{1}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}); \\
4: & \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_0.(\mathbf{1}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) & \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{1}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}); \\
5: & \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_1.(\mathbf{0}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) & \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_f.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}); \\
6: & \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_1.(\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) & \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_f.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}); \\
7: & \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{1}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) & \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}); \\
8: & \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{1}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) & \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});
\end{array}$$

Вычисление M на слове 1:

$$(\mathbf{0}, \mathbf{q}_0, \mathbf{10}) \to_M (\mathbf{01}, \mathbf{q}_0, \mathbf{0}) \to_M (\mathbf{0}, \mathbf{q}_1, \mathbf{10}) \to_M (\mathbf{0}, \mathbf{q}_1, \mathbf{000}) \to_M (\mathbf{00}, \mathbf{q}_f, \mathbf{00})$$

Соответствующее непродолжаемое вычисление $\mathcal{P}_M$:

$$?\mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{1}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) \xrightarrow{3} ?\mathrm{p}((\mathbf{1}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) \xrightarrow{1}$$
$$?\mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{1}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) \xrightarrow{8} ?\mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{0}.\mathbf{0}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) \xrightarrow{5}$$
$$?\mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_f.(\mathbf{0}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil})$$

$\mathcal{P}_M^1$ так обозначим ХЛП, получающуюся из $\mathcal{P}_M$ добавлением факта $\mathrm{p}(\mathtt{X}.\mathbf{q}_f.\mathtt{Y}.\mathbf{nil})$;, где $\mathbf{q}_f$ — заключительное состояние МТ M

$\mathcal{Q}_1 \to_{\mathcal{P}}^* \mathcal{Q}_2$ — так обозначим тот факт, что существует вычисление $\mathcal{P}$ на $\mathcal{Q}_1$, оканчивающееся запросом $\mathcal{Q}_2$ (то есть $\to_{\mathcal{P}}^*$ — рефлексивно-транзитивное замыкание отношения $\to_{\mathcal{P}}$)

Следствие. **Для любой МТ** $M = (\mathcal{A}, \mathbf{\Lambda}, \mathcal{Q}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$ **и любого ленточного сло́ва** w **верно следующее:**
вычисление M **на** w **конечно** $\Leftrightarrow\ ?\mathrm{p}(\tau_{(\Lambda, \mathbf{q}_0, w\Lambda)}) \to_{\mathcal{P}^1}^* \square$

Доказательство.

Вычисление M на w конечно

$\Leftrightarrow$ (по последней теореме)

$\exists$ ленточные слова w_1, w_2, такие что $?\mathrm{p}(\tau_{(\Lambda, \mathbf{q}_0, w\Lambda)}) \to_{\mathcal{P}_M}^* ?\mathrm{p}(\tau_{(w_1, \mathbf{q}_f, w_2)})$

$\Leftrightarrow$ (т.к. $\mathrm{p}(\tau_{(u,q,v)})$ унифицируемо с $p(\mathtt{X}.\mathbf{q}_f.\mathtt{Y}.\mathbf{nil}) \Leftrightarrow q = \mathbf{q}_f$)

$\exists$ ленточные слова w_1, w_2, такие что
$?\mathrm{p}(\tau_{(\Lambda, \mathbf{q}_0, w\Lambda)}) \to_{\mathcal{P}_M^1}^* ?\mathrm{p}(\tau_{(w_1, \mathbf{q}_f, w_2)}) \to_{\mathcal{P}_M^1} \square$ ▼

$\mathcal{P}^2_M$ — так для МТ M с программой π и заключительным состоянием $\mathbf{q}_f$ обозна́чим ХЛП, состоящую из следующих правил $\mathcal{R}^2_C$ и $\mathcal{S}^2_C$ для $C \in \pi$ и одного факта $\mathcal{F}$ в любом порядке:

- Если $C = (\mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, R, \mathbf{p})$, то
$$\begin{aligned}\mathcal{R}^2_C = \quad & \mathrm{p}((\mathbf{b}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) && \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z});\\ \mathcal{S}^2_C = \quad & \mathrm{p}((\mathbf{b}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) && \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z});\end{aligned}$$
- Если $C = (\mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, L, \mathbf{p})$, то
$$\begin{aligned}\mathcal{R}^2_C = \quad & \mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathtt{Y}.\mathbf{b}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) && \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z});\\ \mathcal{S}^2_C = \quad & \mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{p}.(\mathtt{Y}.\mathbf{b}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) && \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z});\end{aligned}$$
- $\mathcal{F} = \mathrm{p}(\mathtt{X}.\mathbf{q}_f.\mathtt{Y}.\mathbf{nil}, \mathtt{X}.\mathbf{q}_f.\mathtt{Y}.\mathbf{nil});$

$\mathcal{P}^2_M$ отличается от $\mathcal{P}^1_M$ только вторым аргументом p, изменяющимся только при применении $\mathcal{F}$ унификацией с первым аргументом (списком, представляющим заключительную конфигурацию M)

Следствие. Вычисление МТ $M = (\mathcal{A}, \mathbf{\Lambda}, \mathcal{Q}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$ на w конечно и оканчивается конфигурацией σ $\Leftrightarrow$ программа $\mathcal{P}^2_M$ имеет единственное непродолжаемое вычисление на $?\mathrm{p}(\tau_{(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{q}_0, w\mathbf{\Lambda})}, \mathtt{X})$, и это успешное вычисление с результатом $\{\mathtt{X}/\tau_\sigma\}$

Пример: $M = (\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \mathbf{0}, \{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_f\}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$, где

$$\pi(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, L, \mathbf{q}_1), \qquad \pi(\mathbf{q}_1, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, R, \mathbf{q}_f),$$
$$\pi(\mathbf{q}_0, \mathbf{1}) = (\mathbf{1}, R, \mathbf{q}_0), \qquad \pi(\mathbf{q}_1, \mathbf{1}) = (\mathbf{0}, L, \mathbf{q}_1),$$

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{P}_M^2: & 1: & \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}); \\
& 2: & \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}); \\
& 3: & \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_0.(\mathbf{1}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{1}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}); \\
& 4: & \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_0.(\mathbf{1}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{1}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}); \\
& 5: & \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_1.(\mathbf{0}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_f.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}); \\
& 6: & \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_1.(\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_f.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}); \\
& 7: & \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{1}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}); \\
& 8: & \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{1}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}); \\
& 9: & \mathrm{p}(\mathtt{X}.\mathbf{q}_f.\mathtt{Y}.\mathbf{nil}, \mathtt{X}.\mathbf{q}_f.\mathtt{Y}.\mathbf{nil})
\end{array}$$

Вычисление M на слове 1:

$$(\mathbf{0}, \mathbf{q}_0, \mathbf{10}) \to_M (\mathbf{01}, \mathbf{q}_0, \mathbf{0}) \to_M (\mathbf{0}, \mathbf{q}_1, \mathbf{10}) \to_M (\mathbf{0}, \mathbf{q}_1, \mathbf{000}) \to_M (\mathbf{00}, \mathbf{q}_f, \mathbf{00})$$

Соответствующее непродолжаемое вычисление $\mathcal{P}_M$:

$$?\mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{1}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{X}) \xrightarrow{3} ?\mathrm{p}((\mathbf{1}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{X}) \xrightarrow{1}$$
$$?\mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{1}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{X}) \xrightarrow{8} ?\mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{0}.\mathbf{0}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{X}) \xrightarrow{5}$$
$$?\mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_f.(\mathbf{0}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{X}) \xrightarrow{9, \{\mathtt{X}/(\mathbf{0}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_f.(\mathbf{0}.\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \dots\}} \square$$

Таким образом, ХЛП умеют

- пошагово воспроизводить вычисления произвольных МТ и
- вычислять всё то, что умеют вычислять МТ

То есть ХЛП являются алгоритмически полными: с их помощью можно решить любую задачу, имеющую хоть какое-нибудь алгоритмическое решение

Оборотная сторона такой выразительности языка — это то, что анализ поведения ХЛП настолько же труден, насколько и для МТ