Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 40

Моделирование машин Тьюринга
хорновскими логическими программами

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Чтобы показать, насколько широки вычислительные возможности ХЛП, опишем способ преобразования МТ $M = (\mathcal{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \pi)$ в ХЛП $\mathcal{P}_M$, особым образом воспроизводящую вычисления M

Символы из $\mathcal{A} \cup \mathcal{Q}$ будем использовать в ХЛП в качестве констант

Ленточному слову $w = \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k$ сопостáвим список $\tau_w = \mathbf{a}_1\mathbf{.} \dots \mathbf{.a}_k\mathbf{.nil}$

w^- — так будем записывать зеркальный образ слова w: если $w = \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k$, то $w^- = \mathbf{a}_k \dots \mathbf{a}_1$

Конфигурации $\sigma = (\alpha, \mathbf{q}, \beta)$ МТ сопостáвим список из трёх элементов $\tau_\sigma = (\tau_{\alpha^-})\mathbf{.q.}(\tau_\beta)\mathbf{.nil}$

Например, если $\sigma = (\mathbf{001}, \mathbf{q}, \mathbf{110})$, то $\tau_\sigma = (\mathbf{1.0.0.nil})\mathbf{.q.}(\mathbf{1.1.0.nil})\mathbf{.nil}$

В программе будем использовать только один предикатный символ p, вкладывая в него такой смысл: $\mathrm{p}(\tau_\sigma) =$ «σ — текущая конфигурация МТ M»

Каждой команде C МТ сопоста́вим два правила ХЛП $\mathcal{R}_C$, $\mathcal{S}_C$:

- Если $C = (\mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, R, \mathbf{p})$, то
$$\begin{aligned}\mathcal{R}_C &= \mathrm{p}((\mathbf{b}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});\\ \mathcal{S}_C &= \mathrm{p}((\mathbf{b}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil});\end{aligned}$$
Напоминание:
$$\begin{aligned}(\alpha, \mathbf{q}, \mathbf{a}x\beta) &\to_C (\alpha\mathbf{b}, \mathbf{p}, x\beta)\\ (\alpha, \mathbf{q}, \mathbf{a}) &\to_C (\alpha\mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{\Lambda})\end{aligned}$$
- Если $C = (\mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, L, \mathbf{p})$, то
$$\begin{aligned}\mathcal{R}_C &= \mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathtt{Y}.\mathbf{b}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});\\ \mathcal{S}_C &= \mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{p}.(\mathtt{Y}.\mathbf{b}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) &&\leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});\end{aligned}$$
Напоминание:
$$\begin{aligned}(\alpha xy, \mathbf{q}, \mathbf{a}\beta) &\to_C (\alpha x, \mathbf{p}, y\mathbf{b}\beta)\\ (y, \mathbf{q}, \mathbf{a}\beta) &\to_C (\mathbf{\Lambda}, \mathbf{p}, y\mathbf{b}\beta)\end{aligned}$$

Лемма 1. **Для любых конфигурации σ, запроса $\mathcal{Q}$ и команды C верно:**
$?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \xrightarrow{\mathcal{R}_C} \mathcal{Q}$ **или** $?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \xrightarrow{\mathcal{S}_C} \mathcal{Q} \Leftrightarrow$
существует конфигурация σ', такая что $\mathcal{Q} = ?\mathrm{p}(\tau_{\sigma'})$ и $\sigma \to_C \sigma'$

Доказательство. Очевидно? (С учётом напоминаний)

Машине Тьюринга M с программой π сопостáвим ХЛП $\mathcal{P}_M = \bigcup\limits_{C \in \pi} \{\mathcal{R}_C, \mathcal{S}_C\}$

Например, если $M = (\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \mathbf{0}, \{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_f\}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$, где

$$\pi(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, L, \mathbf{q}_1), \qquad \pi(\mathbf{q}_1, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, R, \mathbf{q}_f),$$
$$\pi(\mathbf{q}_0, \mathbf{1}) = (\mathbf{1}, R, \mathbf{q}_0), \qquad \pi(\mathbf{q}_1, \mathbf{1}) = (\mathbf{0}, L, \mathbf{q}_1),$$

то программа $\mathcal{P}_M$ содержит 8 правил:

$$\mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});$$
$$\mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});$$

$$\mathrm{p}((\mathbf{1}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_0.(\mathbf{1}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});$$
$$\mathrm{p}((\mathbf{1}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_0.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_0.(\mathbf{1}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil});$$

$$\mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_f.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_1.(\mathbf{0}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});$$
$$\mathrm{p}((\mathbf{0}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_f.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}) \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}_1.(\mathbf{0}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil});$$

$$\mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{1}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});$$
$$\mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathtt{Y}.\mathbf{0}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}) \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}_1.(\mathbf{1}.\mathtt{B}).\mathbf{nil});$$

$\mathcal{Q}_1 \rightarrow_{\mathcal{P}} \mathcal{Q}_2$ — так будем обозначать тот факт, что хотя бы для одного правила $\mathcal{R}$ ХЛП $\mathcal{P}$ верно $\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\mathcal{R}} \mathcal{Q}_2$

Лемма 2. Для любых МТ M, её конфигурации σ и запроса $\mathcal{Q}$ верно:
$?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \rightarrow_{\mathcal{P}_M} \mathcal{Q} \Leftrightarrow$
существует конфигурация σ', такая что $\mathcal{Q} = ?\mathrm{p}(\sigma')$ и $\sigma \rightarrow_M \sigma'$

Доказательство

$?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \rightarrow_{\mathcal{P}_M} \mathcal{Q}$

$\Leftrightarrow$ (по устройству $\mathcal{P}_M$)

$\exists$ команда C МТ M, такая что $?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \rightarrow_{\mathcal{R}_C} \mathcal{Q}$ или $?\mathrm{p}(\tau_\sigma) \rightarrow_{\mathcal{S}_C} \mathcal{Q}$

$\Leftrightarrow$ (по лемме 1)

$\exists$ команда C МТ M и конфигурация σ', такая что $\mathcal{Q} = ?\mathrm{p}(\tau_{\sigma'})$ и $\sigma \rightarrow_C \sigma'$

$\Leftrightarrow$ (по определению $\rightarrow_M$)

$\exists$ конфигурация σ', такая что $\mathcal{Q} = ?\mathrm{p}(\tau_{\sigma'})$ и $\sigma \rightarrow_M \sigma'$ ▼

Теорема (о моделировании машин Тьюринга хорновскими ЛП). **Для любых МТ M и конфигурации σ последовательность запросов**
$?\mathrm{p}(\tau_\sigma),\ ?\mathrm{p}(t_1),\ ?\mathrm{p}(t_2),\ldots$
является вычислением ХЛП $\mathcal{P}_M$ тогда и только тогда, когда существуют конфигурации $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, такие что

- $t_1 = \tau_{\sigma_1},\ t_2 = \tau_{\sigma_2}, \ldots$ **и**
- $\sigma \to_M \sigma_1 \to_M \sigma_2 \to_M \ldots$

Доказательство. Следует из леммы 2

Вычисление ХЛП, порождённое запросом $\mathcal{Q}$, будем для краткости называть вычислением на запросе $\mathcal{Q}$

Вычисление ХЛП назовём непродолжаемым, если оно успешное, тупиковое или бесконечное

Следствие. **Для любой МТ M и любой её конфигурации σ существует ровно одно непродолжаемое вычисление программы $\mathcal{P}_M$ на $?\mathrm{p}(\tau_\sigma)$**

$\mathcal{Q}_1 \to^*_{\mathcal{P}} \mathcal{Q}_2$ — так обозначим тот факт, что существует вычисление $\mathcal{P}$ на $\mathcal{Q}_1$, оканчивающееся запросом $\mathcal{Q}_2$ (то есть $\to^*_{\mathcal{P}}$ — транзитивное замыкание отношения $\to_{\mathcal{P}}$)

$\mathcal{P}^1_M = \mathcal{P}_M \cup \{\mathrm{p}(\mathtt{X}.\mathbf{q}_f.\mathtt{Y}.\mathbf{nil});\}$, где $\mathbf{q}_f$ — заключительное состояние МТ M

Следствие. **Для любой МТ $M = (\mathcal{A}, \mathbf{\Lambda}, \mathcal{Q}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$ и любого ленточного сло́ва w верно следующее:**
вычисление M на w конечно $\Leftrightarrow ?\mathrm{p}(\tau_{(\Lambda, \mathbf{q}_0, w\Lambda)}) \to^*_{\mathcal{P}^1} \square$

Доказательство.

Вычисление M на w конечно

$\Leftrightarrow$ (по последней теореме)

$\exists$ ленточные слова w_1, w_2, такие что $?\mathrm{p}(\tau_{(\Lambda, \mathbf{q}_0, w\Lambda)}) \to^*_{\mathcal{P}_M} ?\mathrm{p}(\tau_{(w_1, \mathbf{q}_f, w_2)})$

$\Leftrightarrow$ (т.к. $\mathrm{p}(\tau_{(u,q,v)})$ унифицируемо с $p(\mathtt{X}.\mathbf{q}_f.\mathtt{Y}.\mathbf{nil}) \Leftrightarrow q = \mathbf{q}_f$)

$\exists$ ленточные слова w_1, w_2, такие что
$?\mathrm{p}(\tau_{(\Lambda, \mathbf{q}_0, w\Lambda)}) \to^*_{\mathcal{P}^1_M} ?\mathrm{p}(\tau_{(w_1, \mathbf{q}_f, w_2)}) \to_{\mathcal{P}^1_M} \square$ ▼

$\mathcal{P}^2_M$ — так для МТ $M = (\mathcal{A}, \mathbf{\Lambda}, \mathcal{Q}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$ обозна́чим ХЛП $(\bigcup\limits_{C \in \pi} \{\mathcal{R}^2_C, \mathcal{S}^2_C\}) \cup \{\mathcal{F}\}$, где:

- Если $C = (\mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, R, \mathbf{p})$, то
$$\begin{aligned}\mathcal{R}^2_C = \quad & \mathrm{p}((\mathbf{b}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) && \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{X}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z});\\ \mathcal{S}^2_C = \quad & \mathrm{p}((\mathbf{b}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) && \leftarrow \mathrm{p}(\mathtt{A}.\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z});\end{aligned}$$
- Если $C = (\mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, L, \mathbf{p})$, то
$$\begin{aligned}\mathcal{R}^2_C = \quad & \mathrm{p}((\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{p}.(\mathtt{Y}.\mathbf{b}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) && \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathtt{X}.\mathtt{A}).\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z});\\ \mathcal{S}^2_C = \quad & \mathrm{p}((\mathbf{\Lambda}.\mathbf{nil}).\mathbf{p}.(\mathtt{Y}.\mathbf{b}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z}) && \leftarrow \mathrm{p}((\mathtt{Y}.\mathbf{nil}).\mathbf{q}.(\mathbf{a}.\mathtt{B}).\mathbf{nil}, \mathtt{Z});\end{aligned}$$
- $\mathcal{F} = \mathrm{p}(\mathtt{X}.\mathbf{q}_f.\mathtt{Y}.\mathbf{nil}, \mathtt{X}.\mathbf{q}_f.\mathtt{Y}.\mathbf{nil});$

$\mathcal{P}^2_M$ отличается от $\mathcal{P}^1_M$ только вторым аргументом p, изменяющимся только при применении правила с $\mathbf{q}_f$ посредством унификации с первым (списком, представляющим заключительную конфигурацию M)

Следствие. Вычисление МТ $M = (\mathcal{A}, \mathbf{\Lambda}, \mathcal{Q}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, \pi)$ на w конечно и оканчивается конфигурацией σ $\Leftrightarrow$ программа $\mathcal{P}^2_M$ имеет единственное непродолжаемое вычисление на $?\mathrm{p}(\tau_{(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{q}_0, w\mathbf{\Lambda})}, \mathtt{X})$, и это успешное вычисление с результатом $\{\mathtt{X}/\tau_\sigma\}$

Таким образом, ХЛП умеют

- пошагово воспроизводить вычисления произвольных МТ и
- вычислять всё то, что умеют вычислять МТ

То есть ХЛП являются алгоритмически полными: с их помощью можно решить любую задачу, имеющую хоть какое-нибудь алгоритмическое решение

Оборотная сторона такой выразительности языка — это то, что анализ поведения ХЛП настолько же труден, насколько и для МТ