

Лекция 6. Биюнктивные КНФ и функции.
Критерий биюнктивности функции.
Полиномиальность проверки выполнимости
биюнктивной КНФ. Полиномиальность поиска
решения выполнимой биюнктивной КНФ.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

Биунктивная ЭД

ЭД называется **биунктивной**, если в нее входит не более двух литералов.

т. е. если D — биунктивная ЭД, то либо

$$D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2},$$

где i_1, i_2 — различны, $\sigma_1, \sigma_2 \in E_2$, либо

$$D = x_i^\sigma,$$

где $\sigma \in E_2$, либо $D = 0$.

Например, $\bar{x}_1, x_1 \vee x_3, \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4$ — биунктивные ЭД.

Биюнктивная КНФ

КНФ называется **биюнктивной**, если она состоит только из биюнктивных ЭД.

Например, $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)$ — биюнктивная КНФ.

Слабо положительная функция

Функция алгебры логики называется **биюнктивной**, если ее можно представить биюнктивной КНФ.

Множество всех биюнктивных функций алгебры логики обозначим B .

Например, $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3) \in B$.

Отметим, что $P_2^{(2)} \subseteq B$.

Приведенное представление функции из B

Любую биюнктивную КНФ функции $g \in B$ назовем **приведенным представлением** этой биюнктивной функции g .

Например, $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)$ — приведенное представление функции из B .

Приведенное представление функции из B

Приведенное представление биюнктивной функции g не обязательно однозначно.

Например,

$$K_1 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)$$

и

$$K_2 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)$$

два различных приведенных представления функции $g \in B$, где $\alpha_g = (0101 \ 1100)$.

Критерий биективности функции

Теорема 1. Функция $g \in P_2$ является биективной тогда и только тогда, когда для любых $\alpha, \beta, \gamma \in N_1(g)$ выполняется $m(\alpha, \beta, \gamma) \in N_1(g)$, где $m(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz \in P_2$ — функция голосования.

Критерий бионктивности функции

Доказательство. Необходимость.

Пусть $g(x_1, \dots, x_n) \in B$, и K — ее бионктивная КНФ. Возьмем произвольные $\alpha, \beta, \gamma \in N_1(g)$. Тогда для каждой ЭД D , входящей в КНФ K , верно $D(\alpha) = 1$, $D(\beta) = 1$ и $D(\gamma) = 1$.

Рассмотрим произвольную ЭД D из КНФ K .

Критерий бионктивности функции

ЭД D является бионктивной, т. е. содержит не более двух литералов. Поэтому хотя бы один ее литерал $L(x_i) = x_i^\sigma$, $\sigma \in E_2$, обращается в единицу хотя бы на двух наборах из α , β и γ , например, на α и β . Тогда $\alpha_i = \beta_i = \sigma$, а значит, по свойствам функции голосования $m(x, y, z)$ верно $m(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = \sigma$:

	1	...	$i-1$	i	$i+1$...	n
α		...		σ		...	
β		...		σ		...	
γ		
$m(\alpha, \beta, \gamma)$...		σ		...	

Получаем, что $L(m(\alpha, \beta, \gamma)) = 1$ и $D(m(\alpha, \beta, \gamma)) = 1$.

Критерий биюнктивности функции

Следовательно, любая ЭД КНФ K обращается в единицу на наборе $m(\alpha, \beta, \gamma)$, т. е. $K(m(\alpha, \beta, \gamma)) = 1$.

Это означает, что $m(\alpha, \beta, \gamma) \in N_1(g)$.

Критерий бионктивности функции

Достаточность. Пусть для функции $g(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in N_1(g)$ верно $m(\alpha, \beta, \gamma) \in N_1(g)$.

Покажем, что сокращенная КНФ K_g функции g является бионктивной, т. е. что каждая простая имплицента D функции g является бионктивной.

Критерий бионктивности функции

Докажем от обратного: пусть ЭД D является простой имплицентой функции g , но содержит по меньшей мере три литерала. Не ограничивая общности рассуждений, пусть

$$D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r},$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in E_2$, $r \geq 3$.

Критерий бионктивности функции

Итак,

$$D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

По критерию простоты имплиценты для литерала $L_1 = x_1^{\sigma_1}$ найдется такой набор $\alpha \in E_2^n$, что

$$g(\alpha) = 1, \quad L_1(\alpha) = 1, \quad D_1(\alpha) = 0,$$

где $D_1 = x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}$.

Значит,

$$\alpha_1 = \sigma_1,$$

$$\alpha_2 = \bar{\sigma}_2,$$

$$\alpha_3 = \bar{\sigma}_3,$$

$$\alpha_i = \bar{\sigma}_i, \quad i = 4, \dots, r.$$

Критерий бионктивности функции

Итак,

$$D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

По критерию простоты имплиценты для литерала $L_2 = x_2^{\sigma_2}$ найдется такой набор $\beta \in E_2^n$, что

$$g(\beta) = 1, \quad L_2(\beta) = 1, \quad D_2(\beta) = 0,$$

где $D_2 = x_1^{\sigma_1} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}$.

Значит,

$$\beta_1 = \bar{\sigma}_1,$$

$$\beta_2 = \sigma_2,$$

$$\beta_3 = \bar{\sigma}_3,$$

$$\beta_i = \bar{\sigma}_i, \quad i = 4, \dots, r.$$

Критерий бионктивности функции

Итак,

$$D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

По критерию простоты имплиценты для литерала $L_3 = x_3^{\sigma_3}$ найдется такой набор $\gamma \in E_2^n$, что

$$g(\gamma) = 1, \quad L_3(\gamma) = 1, \quad D_3(\gamma) = 0,$$

где $D_3 = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}$.

Значит,

$$\gamma_1 = \bar{\sigma}_1,$$

$$\gamma_2 = \bar{\sigma}_2,$$

$$\gamma_3 = \sigma_3,$$

$$\gamma_i = \bar{\sigma}_i, \quad i = 4, \dots, r.$$

Критерий бионктивности функции

Итак,

$$D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \dots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

Получаем:

	1	2	3	4	...	r	$r+1$...	n
α	σ_1	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\sigma}_3$	$\bar{\sigma}_4$...	$\bar{\sigma}_r$...	
β	$\bar{\sigma}_1$	σ_2	$\bar{\sigma}_3$	$\bar{\sigma}_4$...	$\bar{\sigma}_r$...	
γ	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}_2$	σ_3	$\bar{\sigma}_4$...	$\bar{\sigma}_r$...	
$m(\alpha, \beta, \gamma)$	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\sigma}_3$	$\bar{\sigma}_4$...	$\bar{\sigma}_r$...	

Значит, $D(m(\alpha, \beta, \gamma)) = 0$, из чего следует $g(m(\alpha, \beta, \gamma)) = 0$.
Но это означает, что $m(\alpha, \beta, \gamma) \notin N_1(g)$, чего не может быть.

Критерий бионктивности функции

Следовательно, каждая простая имплицента функции g является бионктивной.



Сокращенная КНФ бионктивной функции

При доказательстве теоремы 1 показано, что сокращенная КНФ бионктивной функции является ее приведенным представлением.

Проверка биюнктивности функции

Пример. По критерию из теоремы 1 покажем биюнктивность функции $g \in P_2$, где $\alpha_g = (0011\ 1010)$.

Получаем:

$$N_1(g) = \{\alpha_1 = (0, 1, 0), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 0, 0), \alpha_4 = (1, 1, 0)\}.$$

Проверяем:

$$m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 0),$$

$$m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = (0, 1, 0),$$

$$m(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4) = (1, 1, 0),$$

$$m(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1, 1, 0).$$

Значит, $g \in B$.

Проверка биюнктивности функции

Пример. По критерию из теоремы 1 покажем, что функция $g \in P_2$, где $\alpha_g = (0110 \ 1000)$, не является биюнктивной.

Получаем:

$$N_1(g) = \{\alpha_1 = (0, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 0)\}.$$

Проверяем:

$$m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0) \notin N_1(g).$$

Значит, $g \notin B$.

Проверка выполнимости бюнктивной КНФ

Опишем алгоритм проверки выполнимости бюнктивной КНФ.

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Алгоритм 7. Проверка выполнимости биюнктивной КНФ.

Вход: биюнктивная КНФ K функции $g \in B$.

Выход: «да», если $g \neq 0$, и «нет», если $g = 0$.

Проверка выполнимости бионктивной КНФ

Алгоритм 7.

1. По алгоритму 1 строим сокращенную КНФ K_g функции g по ее КНФ K .
2. Если $K_g \neq 0$, то ответ «да», если $K_g = 0$, то ответ «нет».

Правильность и полиномиальность алгоритма

Правильность алгоритма 7 следует из того, что сокращенная КНФ для каждой функции из P_2 однозначна и константа 0 является сокращенной КНФ тождественно нулевой функции.

Алгоритм 7 является полиномиальным, т. к.

- 1) ранг резольвенты любых двух ЭД рангов, не превосходящих двух, также не превосходит двух;
- 2) при построении сокращенной КНФ каждая ЭД ранга, не превосходящего два, может быть добавлена не более одного раза, а всего таких ЭД найдется $O(n^2)$, где n — число переменных в исходной КНФ.

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Пример. Проверим по алгоритму 7, является ли КНФ

$$K = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)$$

выполнимой.

Итак,

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3).$$

Рассмотрим 1-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3).$$

Проверка выполнимости бионктивной КНФ

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3).$$

Рассмотрим 6-ю и 7-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)(x_3).$$

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) находим:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3).$$

Рассмотрим 3-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3)(\bar{x}_2).$$

Проверка выполнимости бионктивной КНФ

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_3)(\bar{x}_2).$$

Рассмотрим 1-ю и 3-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_3)(\bar{x}_2)(\bar{x}_1).$$

После выполнения поглощений (поглощаемая ЭД выделена красным) находим:

$$K_0 = (x_1 \vee x_2)(x_3)(\bar{x}_2)(\bar{x}_1).$$

Рассмотрим 1-ю и 3-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (x_1 \vee x_2)(x_3)(\bar{x}_2)(\bar{x}_1)(x_1).$$

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

После выполнения поглощений (поглощаемая ЭД выделена красным) получаем:

$$K_0 = (x_3)(\bar{x}_2)(\bar{x}_1)(x_1).$$

Рассмотрим 3-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена красным):

$$K_0 = (x_3)(\bar{x}_2)(\bar{x}_1)(x_1) \cdot \mathbf{0}.$$

Значит, $K_g = 0$, поэтому ответ «нет».

Проверка выполнимости бионктивной КНФ

Пример. Проверим по алгоритму 7, является ли КНФ

$$K = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)$$

выполнимой.

Итак,

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4).$$

Рассмотрим 1-ю и 2-ю ЭД и добавим их **резольвенту**:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3).$$

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3).$$

Рассмотрим 2-ю и 3-ю ЭД и добавим их **резольвенту**:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

Находим:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

Рассмотрим 3-ю и 4-ю ЭД и добавим их **резольвенту**:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_3).$$

Проверка выполнимости биюнкативной КНФ

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_3).$$

Рассмотрим 1-ю и 4-ю ЭД и добавим их резольвенту:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4).$$

Находим:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4).$$

Рассмотрим 1-ю и 7-ю ЭД и добавим их резольвенту:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3).$$

Проверка выполнимости бионктивной КНФ

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3).$$

Рассмотрим 2-ю и 7-ю ЭД и добавим их **резольвенту**:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2).$$

Находим:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2).$$

Рассмотрим 2-ю и 8-ю ЭД и добавим их **резольвенту**:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4).$$

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4) \cdot \\ \cdot (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4).$$

Рассмотрим 3-ю и 5-ю ЭД и добавим их **резольвенту**:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4) \cdot \\ \cdot (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_4).$$

Находим:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4) \cdot \\ \cdot (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_4).$$

Проверка выполнимости бюнктивной КНФ

Теперь никакую новую резольвенту добавить нельзя, поэтому получена сокращенная КНФ K_g :

$$K_g = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee x_4).$$

Значит, $K_g \neq 0$, поэтому ответ «да».

Выполнимость биюнктивной КНФ

А как найти набор, на котором выполняемая биюнктивная КНФ равна 1?

Решение выполнимой S -КНФ

Пусть $S \subseteq P_2$ и $K(x_1, \dots, x_n)$ — S -КНФ.

Набор $\alpha \in E_2^n$ (если он существует) называется **решением**, или **выполняющим набором** S -КНФ K , если $K(\alpha) = 1$.

Ясно, что решение существует только у **выполнимой** S -КНФ.

Сокращенная КНФ подфункции

Теорема 2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ и $\sigma \in E_2^k$, $1 \leq k \leq n$. Если КНФ

$$K_f = D_1 \cdot \dots \cdot D_m$$

является сокращенной КНФ функции f и ЭД D'_j (или $D'_j = 1$) получена из ЭД D_j заменой переменных x_1, \dots, x_k соответственно на $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, $j = 1, \dots, m$, то КНФ

$$K = D'_1 \cdot \dots \cdot D'_m$$

(после выполнения всех возможных поглощений) является сокращенной КНФ подфункции $f_\sigma(x_{k+1}, \dots, x_n)$.

Сокращенная КНФ подфункции

Доказательство.

1. Сначала заметим, что КНФ K задает функцию f_σ .
2. Теперь покажем, что КНФ K является сокращенной КНФ функции f_σ , т. е. она содержит любую простую имплиценту функции f_σ .

Сокращенная КНФ подфункции

Пусть ЭД D_0 — какая-то простая имплицента функции f_σ . Это означает, что для любого набора $\beta \in E_2^{n-k}$ из $D_0(\beta) = 0$ следует $f_\sigma(\beta) = f(\sigma, \beta) = 0$.

Значит, ЭД $x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_k^{\bar{\sigma}_k} \vee D_0$ — имплицента функции f .

Но тогда либо она сама является простой имплицентой, либо ее можно сузить до некоторой простой имплиценты функции f .

Заметим, что если ее можно сузить, то **никакой литерал из D_0 убрать нельзя, т. к. иначе какое-то сужение D_0 является имплицентой функции f_σ , что невозможно.**

Сокращенная КНФ подфункции

Следовательно, ЭД $D = D^* \vee D_0$, где ЭД D^* является сужением ЭД $x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_k^{\bar{\sigma}_k}$, является простой имплицетой функции f , а значит, входит в КНФ K_f .

Поэтому ЭД D_0 входит в КНФ K .

Кроме того, в КНФ K ЭД D_0 не может поглотиться никакой другой ЭД, т. к. она является простой имплицетой функции f_σ .



Сокращенная КНФ подфункции

Пример. Рассмотрим сокращенную КНФ K_f функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P_2$:

$$K_f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4).$$

Тогда если $\sigma = (0, 1) \in E_2^2$, то КНФ

$$K = (\bar{0} \vee \bar{1})(0 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{1} \vee \bar{x}_3 \vee x_4) = \bar{x}_3 \vee x_4$$

является сокращенной КНФ функции $f_\sigma(x_3, x_4) = f(0, 1, x_3, x_4)$.

Поиск решения сокращенной КНФ

Теперь можно описать алгоритм поиска решения сокращенной КНФ.

Поиск решения сокращенной КНФ

Алгоритм 8. Поиск решения сокращенной КНФ.

Вход: сокращенная КНФ K_f функции $f \in P_2^{(n)}$, $f \neq 0$.

Выход: такой набор $\alpha \in E_2^n$, что $f(\alpha) = 1$.

Поиск решения сокращенной КНФ

Алгоритм 8.

1. $K_0 := K$, $\alpha_0 := (0, \dots, 0) \in E_2^n$.

2. 1) Если $K_0 = 1$, то ответ $\alpha := \alpha_0$.

2) Выбираем произвольную ЭД $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$ из K_0 и получаем K_0 , заменяя в K_0 переменную x_{i_1} на σ_1 , x_{i_j} на $\bar{\sigma}_j$, выполняя упрощения в каждой ЭД и все возможные поглощения, и $\alpha_0(i_1) := \sigma_1$, $\alpha_0(i_j) := \bar{\sigma}_j$, $j = 2, \dots, r$.

3) Переход на 2.

Правильность и полиномиальность алгоритма

Правильность алгоритма 8 следует из критерия простоты имплиценты и теоремы 2.

Отметим, что алгоритм 8 является полиномиальным.

Поиск решения бионктивной КНФ

Пример. По алгоритму 8 найдем решение выполнимой бионктивной сокращенной КНФ K_g , полученной в предыдущих примерах:

$$K_g = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4) \cdot \\ \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee x_4).$$

Поиск решения биюнктивной КНФ

Получаем:

$$\begin{aligned}K_0 &= (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4) \cdot \\ &\quad \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee x_4), \\ \alpha_0 &= (0, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Рассмотрим $D = \bar{x}_1 \vee x_2$ и положим $x_1 = 0$, $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned}K_0 &= (x_3)(\bar{x}_4), \\ \alpha_0 &= (0, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Рассмотрим $D = x_3$ и положим $x_3 = 1$:

$$\begin{aligned}K_0 &= (\bar{x}_4), \\ \alpha_0 &= (0, 0, 1, 0).\end{aligned}$$

Рассмотрим $D = \bar{x}_4$ и положим $x_4 = 0$:

$$\begin{aligned}K_0 &= 1, \\ \alpha_0 &= (0, 0, 1, 0).\end{aligned}$$

Ответ: $\alpha = (0, 0, 1, 0)$.

Графовый алгоритм

Рассмотрим **графовый алгоритм** проверки выполнимости бионктивной КНФ.

Граф биюнктивной КНФ

Пусть $K(x_1, \dots, x_n) = D_1 \cdot \dots \cdot D_m$ — биюнктивная КНФ.

Построим **ориентированный** граф $G_K = (V, E)$, где

$$V = \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\},$$
$$E = \{(x_i^{\bar{\sigma}}, x_j^{\delta}), (x_j^{\bar{\delta}}, x_i^{\sigma}) \mid D = x_i^{\sigma} \vee x_j^{\delta} \text{ — ЭД в } K\}.$$

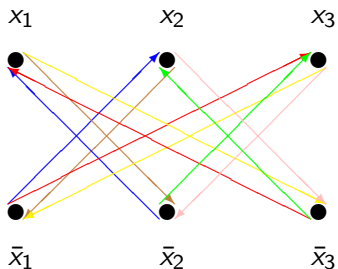
Т.е. **вершины** графа G_K — $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, **дуги** — $(x_i^{\bar{\sigma}}, x_j^{\delta})$, $(x_j^{\bar{\delta}}, x_i^{\sigma})$, полученные по каждой ЭД $D = x_i^{\sigma} \vee x_j^{\delta}$ в КНФ K .

Граф биюнкативной КНФ

Пример. Пусть

$$K = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Построим граф G_K :



Проверка выполнимости биюнктивной КНФ по графу

Теорема 3. Пусть $K(x_1, \dots, x_n)$ — биюнктивная КНФ. Тогда КНФ K — выполнима тогда и только тогда, когда в графе G_K не найдется ни одного направленного цикла, в котором встречаются вершины x_i и \bar{x}_i для некоторого i .

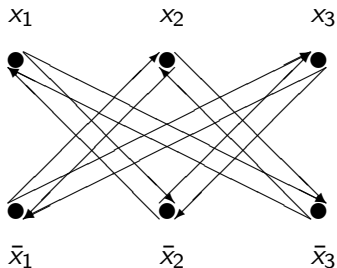
Доказательство проведите самостоятельно.

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ по графу

Пример. Рассмотрим биюнктивную КНФ

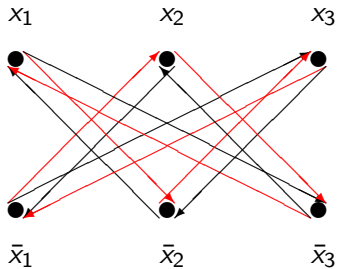
$$K = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

и ее граф G_K :



Проверка выполнимости биюнктивной КНФ по графу

Получаем направленный цикл с x_1 и \bar{x}_1 :



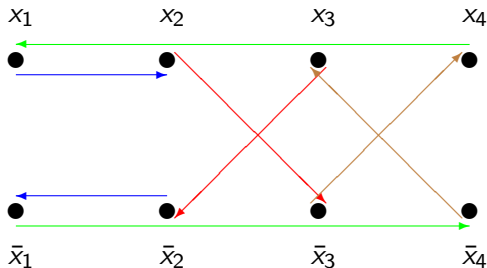
Значит, КНФ K — не выполнима.

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ по графу

Пример. Рассмотрим биюнктивную КНФ

$$K = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)$$

и ее граф G_K :



В G_K отсутствуют направленные циклы с x_i и \bar{x}_i .
Значит, КНФ K — выполнима.

Полиномиальность S -ВЫП при $S \subseteq B$

Теорема 4. Пусть $S \subseteq P_2$ и S — конечно.

Если $S \subseteq B$, то S -ВЫП $\in P$.

