Лекция 6. Биюнктивные КНФ и функции. Критерий биюнктивности функции. Полиномиальность проверки выполнимости биюнктивной КНФ. Полиномиальность поиска решения выполнимой биюнктивной КНФ.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Биюнктивная ЭД

ЭД называется **биюнктивной**, если в нее входит не более двух литералов.

Т.е. если D — **биюнктивная** ЭД, то либо

$$D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2},$$

где i_1, i_2 — различны, $\sigma_1, \sigma_2 \in E_2$, либо

$$D = x_i^{\sigma},$$

где $\sigma \in E_2$, либо $D = 0$.

Например, $\bar{x}_1$, $x_1 \vee x_3$, $\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4$ — биюнктивные ЭД.

Биюнктивная КНФ

КНФ называется **биюнктивной**, если она состоит только из биюнктивных ЭД.

Например, $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)$ — биюнктивная КНФ.

Слабо положительная функция

Функция алгебры логики называется **биюнктивной**, если ее можно представить биюнктивной КНФ.

Множество всех биюнктивных функций алгебры логики обозначим B.

Например, $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3) \in B$.

Отметим, что $P_2^{(2)} \subseteq B$.

Приведенное представление функции из B

Любую биюнктивную КНФ функции $g \in B$ назовем **приведенным представлением** этой биюнктивной функции g.

Например, $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)$ — приведенное представление функции из B.

Приведенное представление функции из B

Приведенное представление биюнктивной функции g **не обязательно** однозначно.

Например,

$$K_1 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)$$

и

$$K_2 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)$$

два различных приведенных представления функции $g \in B$, где $\alpha_g = (0101\ 1100)$.

Критерий биюнктивности функции

Теорема 1. *Функция* $g \in P_2$ *является биюнктивной тогда и только тогда, когда для любых* $\alpha, \beta, \gamma \in N_1(g)$ *выполняется* $m(\alpha, \beta, \gamma) \in N_1(g)$, *где* $m(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz \in P_2$ *— функция голосования.*

Критерий биюнктивности функции

Доказательство. *Необходимость*.
Пусть $g(x_1, \dots, x_n) \in B$, и K — ее биюнктивная КНФ. Возьмем произвольные $\alpha, \beta, \gamma \in N_1(g)$. Тогда для каждой ЭД D, входящей в КНФ K, верно $D(\alpha) = 1$, $D(\beta) = 1$ и $D(\gamma) = 1$.

Рассмотрим произвольную ЭД D из КНФ K.

Критерий биюнктивности функции

ЭД D является биюнктивной, т.е. содержит не более двух литералов. Поэтому хотя бы один ее литерал $L(x_i) = x_i^{\sigma}$, $\sigma \in E_2$, обращается в единицу хотя бы на двух наборах из α, β и γ, например, на α и β. Тогда $\alpha(i) = \beta(i) = \sigma$, а значит, по свойствам функции голосования $m(x, y, z)$ верно $m(\alpha(i), \beta(i), \gamma(i)) = \sigma$: :

	1	$\ldots$	$i-1$	i	$i+1$	$\ldots$	n
α		$\ldots$		σ		$\ldots$	
β		$\ldots$		σ		$\ldots$	
γ		$\ldots$				$\ldots$	
$m(\alpha, \beta, \gamma)$		$\ldots$		σ		$\ldots$	

Получаем, что $L(m(\alpha, \beta, \gamma)) = 1$ и $D(m(\alpha, \beta, \gamma)) = 1$.

Критерий биюнктивности функции

Следовательно, любая ЭД КНФ K обращается в единицу на наборе $m(\alpha, \beta, \gamma)$, т.е. $K(m(\alpha, \beta, \gamma)) = 1$.

Это означает, что $m(\alpha, \beta, \gamma) \in N_1(g)$.

Критерий биюнктивности функции

Достаточность. Пусть для функции $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in N_1(g)$ верно $m(\alpha, \beta, \gamma) \in N_1(g)$.
Покажем, что сокращенная КНФ K_g функции g является биюнктивной, т.е. что каждая простая имплицента D функции g является биюнктивной.

Критерий биюнктивности функции

Докажем от противного: пусть ЭД D является простой импликентой функции g, но содержит по меньшей мере три литерала. Не ограничивая общности рассуждений, пусть

$$D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r},$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in E_2$, $r \geq 3$.

Критерий бионктивности функции

Итак,

$$D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

По критерию простоты импликанты для литерала $L_1 = x_1^{\sigma_1}$ найдется такой набор $\alpha \in E_2^n$, что

$$g(\alpha) = 1,\ L_1(\alpha) = 1,\ D_1(\alpha) = 0,$$

где $D_1 = x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}$.

Значит,

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= \sigma_1, \\ \alpha(2) &= \bar{\sigma}_2, \\ \alpha(3) &= \bar{\sigma}_3, \\ \alpha(i) &= \bar{\sigma}_i,\ \ i = 4, \ldots, r. \end{aligned}$$

Критерий биюнктивности функции

Итак,

$$D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

По критерию простоты импликанты для литерала $L_2 = x_2^{\sigma_2}$ найдется такой набор $\beta \in E_2^n$, что

$$g(\beta) = 1, \; L_2(\beta) = 1, \; D_2(\beta) = 0,$$

где $D_2 = x_1^{\sigma_1} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}$.

Значит,

$$\begin{aligned}
\beta(1) &= \bar{\sigma}_1, \\
\beta(2) &= \sigma_2, \\
\beta(3) &= \bar{\sigma}_3, \\
\beta(i) &= \bar{\sigma}_i, \; i = 4, \ldots, r.
\end{aligned}$$

Критерий биюнктивности функции

Итак,

$$D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

По критерию простоты импликанты для литерала $L_3 = x_3^{\sigma_3}$ найдется такой набор $\gamma \in E_2^n$, что

$$g(\gamma) = 1,\ L_3(\gamma) = 1,\ D_3(\gamma) = 0,$$

где $D_3 = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}$.

Значит,

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= \bar{\sigma}_1, \\ \gamma(2) &= \bar{\sigma}_2, \\ \gamma(3) &= \sigma_3, \\ \gamma(i) &= \bar{\sigma}_i,\ i = 4, \ldots, r. \end{aligned}$$

Критерий биюнктивности функции

Итак,

$$D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4} \vee \ldots \vee x_r^{\sigma_r}.$$

Получаем:

	1	2	3	4	$\ldots$	r	$r+1$	$\ldots$	n
α	σ_1	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\sigma}_3$	$\bar{\sigma}_4$	$\ldots$	$\bar{\sigma}_r$		$\ldots$	
β	$\bar{\sigma}_1$	σ_2	$\bar{\sigma}_3$	$\bar{\sigma}_4$	$\ldots$	$\bar{\sigma}_r$		$\ldots$	
γ	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}_2$	σ_3	$\bar{\sigma}_4$	$\ldots$	$\bar{\sigma}_r$		$\ldots$	
$m(\alpha, \beta, \gamma)$	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\sigma}_3$	$\bar{\sigma}_4$	$\ldots$	$\bar{\sigma}_r$		$\ldots$	

Значит, $D(m(\alpha, \beta, \gamma)) = 0$, из чего следует $g(m(\alpha, \beta, \gamma)) = 0$. Но это означает, что $m(\alpha, \beta, \gamma) \notin N_1(g)$, чего не может быть.

Критерий биюнктивности функции

Следовательно, каждая простая импликацента функции g является биюнктивной.

$\square$

Сокращенная КНФ биюнктивной функции

При доказательстве теоремы 1 показано, что сокращенная КНФ биюнктивной функции является ее приведенным представлением.

Проверка биюнктивности функции

Пример. По критерию из теоремы 1 покажем биюнктивность функции $g \in P_2$, где $\alpha_g = (0011\ 1010)$.

Получаем:

$$N_1(g) = \{\alpha_1 = (0,1,0), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (1,0,0), \alpha_4 = (1,1,0)\}.$$

Проверяем:

$$\begin{aligned} m(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= (0,1,0), \\ m(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4) &= (0,1,0), \\ m(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4) &= (1,1,0), \\ m(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) &= (1,1,0). \end{aligned}$$

Значит, $g \in B$.

Проверка бионктивности функции

Пример. По критерию из теоремы 1 покажем, что функция $g \in P_2$, где $\alpha_g = (0110\ 1000)$, не является бионктивной.

Получаем:

$$N_1(g) = \{\alpha_1 = (0,0,1), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (1,0,0)\}.$$

Проверяем:

$$m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0) \notin N_1(g).$$

Значит, $g \notin B$.

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Опишем алгоритм проверки выполнимости биюнктивной КНФ.

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Алгоритм 8. *Проверка выполнимости биюнктивной КНФ.*

Вход: биюнктивная КНФ K функции $g \in B$.

Выход: «да», если $g \neq 0$, и «нет», если $g = 0$.

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Алгоритм 8.

1. По алгоритму 1 строим сокращенную КНФ K_g функции g по ее КНФ K.

2. Если $K_g \neq 0$, то ответ **«да»**, если $K_g = 0$, то ответ **«нет»**.

Правильность и полиномиальность алгоритма 8

Правильность алгоритма 8 следует из того, что сокращенная КНФ для каждой функции из P_2 однозначна, и константа 0 является сокращенной КНФ тождественно нулевой функции.

Алгоритм 8 является полиномиальным, т. к.
1) ранг резольвенты любых двух ЭД рангов, не превосходящих двух, также не превосходит двух;
2) при построении сокращенной КНФ каждая ЭД ранга, не превосходящего два, может быть добавлена не более одного раза, а всего таких ЭД найдется $O(n^2)$, где n — число переменных в исходной КНФ.

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Пример. Проверим по алгоритму 8, является ли КНФ

$$K = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)$$

выполнимой.
Итак,

$$K_0 = \color{blue}{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)}(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)\color{blue}{(x_1 \vee x_3)}(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3).$$

Рассмотрим 1-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)\color{green}{(\bar{x}_2 \vee x_3)}.$$

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3).$$

Рассмотрим 6-ю и 7-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)(x_3).$$

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) находим:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3).$$

Рассмотрим 3-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3)(\bar{x}_2).$$

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

После выполнения поглощений (поглощаемые ЭД выделены красным) получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_3)(\bar{x}_2).$$

Рассмотрим 1-ю и 3-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2)(x_3)(\bar{x}_2)(\bar{x}_1).$$

После выполнения поглощений (поглощаемая ЭД выделена красным) находим:

$$K_0 = (x_1 \vee x_2)(x_3)(\bar{x}_2)(\bar{x}_1).$$

Рассмотрим 1-ю и 3-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена зеленым):

$$K_0 = (x_1 \vee x_2)(x_3)(\bar{x}_2)(\bar{x}_1)(x_1).$$

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

После выполнения поглощений (поглощаемая ЭД выделена красным) получаем:

$$K_0 = (x_3)(\bar{x}_2)(\bar{x}_1)(x_1).$$

Рассмотрим 3-ю и 4-ю ЭД (выделены синим) и добавим их резольвенту (выделена красным):

$$K_0 = (x_3)(\bar{x}_2)(\bar{x}_1)(x_1) \cdot \mathbf{0}.$$

Значит, $K_g = 0$, поэтому ответ «**нет**».

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Пример. Проверим по алгоритму 8, является ли КНФ

$$K = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)$$

выполнимой.
Итак,

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4).$$

Рассмотрим 1-ю и 2-ю ЭД и добавим их резольвенту:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_3).$$

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3).$$

Рассмотрим 2-ю и 3-ю ЭД и добавим их резольвенту:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

Находим:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4).$$

Рассмотрим 3-ю и 4-ю ЭД и добавим их резольвенту:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_3).$$

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_3).$$

Рассмотрим 1-ю и 4-ю ЭД и добавим их резольвенту:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4).$$

Находим:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4).$$

Рассмотрим 1-ю и 7-ю ЭД и добавим их резольвенту:

$$\begin{aligned} K_0 \;=\; & (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)\cdot \\ & \cdot(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3). \end{aligned}$$

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)\cdot \\ \cdot(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3).$$

Рассмотрим 2-ю и 7-ю ЭД и добавим их резольвенту:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)\cdot \\ \cdot(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2).$$

Находим:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)\cdot \\ \cdot(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2).$$

Рассмотрим 2-ю и 8-ю ЭД и добавим их резольвенту:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)\cdot \\ \cdot(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4).$$

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Получаем:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)\cdot \cdot(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4).$$

Рассмотрим 3-ю и 5-ю ЭД и добавим их резольвенту:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)\cdot \cdot(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_4).$$

Находим:

$$K_0 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)\cdot \cdot(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_4).$$

Проверка выполнимости биюнктивной КНФ

Теперь никакую новую резольвенту добавить нельзя, поэтому получена сокращенная КНФ K_g:

$$\begin{aligned} K_g \quad = \quad & (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)\cdot \\ & \cdot(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee x_4). \end{aligned}$$

Значит, $K_g \neq 0$, поэтому ответ **«да»**.

Выполнимость биюнктивной КНФ

А как найти набор, на котором выполнимая биюнктивная КНФ равна 1?

Решение выполнимой КНФ

Пусть $S \subseteq P_2$ и $K(x_1, \ldots, x_n)$ — S-КНФ.

Набор $\alpha \in E_2^n$ (если он существует) называется **решением**, или **выполняющим набором** S-КНФ K, если $K(\alpha) = 1$.

Ясно, что решение существует только у **выполнимой** S-КНФ.

Импliценты подфункции

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ и ЭД D — импликцента функции f. Тогда*

1. *Если D не содержит переменную x_1, то D является импликцентой подфункции f_σ, $\sigma \in E_2$.*

2. *Если $D = x_1^{\bar{\sigma}} \vee D'$, где $\sigma \in E_2$ и D' — некоторая ЭД, не содержащая переменную x_1, то D' является импликцентой подфункции f_σ. Более того, если D — простая импликцента функции f, то D' — простая импликцента подфункции f_σ.*

Импликанты подфункции

Доказательство.
1. Пусть ЭД D не содержит переменную x_1.

Если $\beta \in E_2^{n-1}$ и $D(\beta) = 0$, то для $\alpha = (\sigma, \beta) \in E_2^n$ верно $D(\alpha) = 0$.

ЭД D является имплицентой f, поэтому $f(\alpha) = 0$. Т.е. $f_\sigma(\beta) = 0$.

Значит, D является имплицентой f_σ.

Импликенты подфункции

Доказательство.
2. Пусть $D = x_1^{\bar{\sigma}} \vee D'$, где $\sigma \in E_2$ и D' — некоторая ЭД, не содержащая переменную x_1.

Если $\beta \in E_2^{n-1}$ и $D'(\beta) = 0$, то для $\alpha = (\sigma, \beta) \in E_2^n$ верно $D(\alpha) = 0$.

ЭД D является импликентой f, поэтому $f(\alpha) = 0$. Т.е. $f_\sigma(\beta) = 0$.

Значит, D является импликентой f_σ.

Импликенты подфункции

Доказательство.
Теперь пусть $D = x_1^{\bar{\sigma}} \vee D'$ является простой импликентой f.

Докажем утверждение от противного: предположим, что импликента D' подфункции f_σ не является ее простой импликентой.

Это означает, что $D' = L(x_i) \vee D'_1$, где ЭД D'_1, не содержащая переменную x_i, является импликентой подфункции f_σ. Т.е. для любого $\gamma \in E_2^{n-1}$ из $D'_1(\gamma) = 0$ следует $f_\sigma(\gamma) = 0$.

Рассмотрим ЭД $D_1 = x_1^{\bar{\sigma}} \vee D'_1$. Если $\alpha \in E_2^n$ и $D_1(\alpha) = 0$, то $\alpha = (\sigma, \beta)$ для некоторого набора $\beta \in E_2^{n-1}$.

Значит, $D'_1(\beta) = 0$, откуда $f_\sigma(\beta) = 0$ и $f(\alpha) = 0$.

Т.е. D_1 является импликентой функции f. Но D_1 является собственным сужением D, т.е. получаем противорение.

Имплиценты функции

Теорема 3. *Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ и $\sigma \in E_2$. Если D' является простой имлицентой функции f_σ, то либо $D = x_1^{\bar\sigma} \vee D'$ — простая имплицента функции f, либо D' — простая имплицента функции f.*

Доказательство. Пусть D' — простая имлицента функции f_σ.

1. Рассмотрим ЭД $D = x_1^{\bar\sigma} \vee D'$.

Если $\alpha \in E_2^n$ и $D(\alpha) = 0$, то $\alpha = (\sigma, \beta) \in E_2^n$ для некоторого такого $\beta \in E_2^{n-1}$, что $D'(\beta) = 0$.

ЭД D' — имплицента f_σ, поэтому $f_\sigma(\beta) = 0$.

Значит, $f(\alpha) = 0$, т.е. D — имплицента f.

Имплиценты функции

2. Если D не является простой имплицентой f, то найдется ее собственное сужение D_1, являющееся имплицентой f.

Пусть $D_1 = x_1^{\bar{\sigma}} \vee D_1'$, где D_1' — собственное сужение D'.

Если $\alpha \in E_2^n$ и $D_1(\alpha) = 0$, то $\alpha = (\sigma, \beta) \in E_2^n$ для некоторого такого $\beta \in E_2^{n-1}$, что $D_1'(\beta) = 0$.

ЭД D_1 — имплицента f, поэтому $f(\alpha) = 0$.

Значит, $f_\sigma(\beta) = 0$, т.е. D_1' — имплицента f_σ, что противоречит простоте имплиценты D'.

Поэтому D может быть сужена только до D'.

$\square$

Сокращенная КНФ подфункции

Из теорем 2 и 3 получаем теорему 4.

Теорема 4. *Пусть*

$$K_f = D_1 \cdot \ldots \cdot D_m$$

сокращенная КНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ *и ЭД* D'_j *получена из ЭД* D_j *заменой переменных* $x_1, \ldots, x_r$ *соответственно на* $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in E_2$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда КНФ*

$$K = D'_1 \cdot \ldots \cdot D'_m$$

(*после выполнения всех возможных поглощений*) *является сокращенной КНФ подфункции* $f_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)}$.

Поиск решения сокращенной КНФ

Теперь можно описать алгоритм поиска решения сокращенной КНФ.

Поиск решения сокращенной КНФ

Алгоритм 9. *Поиск решения сокращенной КНФ*.

Вход: сокращенная КНФ K_f функции $f \in P_2^{(n)}$, $f \neq 0$.

Выход: такой набор $\alpha \in E_2^n$, что $f(\alpha) = 1$.

Поиск решения сокращенной КНФ

Алгоритм 9.

1. $K_0 := K$, $\alpha_0 := (0, \dots, 0) \in E_2^n$.

2. 1) Если $K_0 = 1$, то ответ $\alpha := \alpha_0$.

2) Выбираем произвольную ЭД $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$ из K_0 и получаем K_0, заменяя в K_0 переменную x_{i_1} на σ_1, x_{i_j} на $\bar{\sigma}_j$, выполняя упрощения в каждой ЭД и все возможные поглощения, и $\alpha_0(i_1) := \sigma_1$, $\alpha_0(i_j) := \bar{\sigma}_j$, $j = 2, \dots, r$.

3) Переход на **2**.

Поиск решения сокращенной КНФ

Правильность алгоритма 9 следует из критерия простоты импликценты и теоремы 4.

Отметим, что алгоритм 9 является полиномиальным.

Поиск решения биюнктивной КНФ

Пример. По алгоритму 9 найдем решение выполнимой биюнктивной сокращенной КНФ K_g, полученной в предыдущих примерах:

$$\begin{aligned} K_g \quad = \quad & (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)\cdot \\ & \cdot(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee x_4). \end{aligned}$$

Поиск решения биюнктивной КНФ

Получаем:

$$\begin{aligned} K_0 &= (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_4)\cdot \\ &\cdot(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee x_4), \\ \alpha_0 &= (0,0,0,0). \end{aligned}$$

Рассмотрим $D = \bar{x}_1 \vee x_2$ и положим $x_1 = 0$, $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} K_0 &= (x_3)(\bar{x}_4), \\ \alpha_0 &= (0,0,0,0). \end{aligned}$$

Рассмотрим $D = x_3$ и положим $x_3 = 1$:

$$\begin{aligned} K_0 &= (\bar{x}_4), \\ \alpha_0 &= (0,0,1,0). \end{aligned}$$

Рассмотрим $D = \bar{x}_4$ и положим $x_4 = 0$:

$$\begin{aligned} K_0 &= 1, \\ \alpha_0 &= (0,0,1,0). \end{aligned}$$

Ответ: $\alpha = (0,0,1,0)$.

Полиномиальногсть S-*ВЫП* при $S \subseteq B$

Теорема 5. *Пусть* $S \subseteq P_2$ *и* S *— конечно.*

Если $S \subseteq B$, *то* S-*ВЫП* $\in P$.

Конец лекции