Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы
$\to$ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 11

Метод семантических таблиц:
корректность табличного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,T_2)}$:

$L\&$, $R\&$, $L\vee$, $R\vee$, $L\to$, $R\to$, $L\neg$, $R\neg$, $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$ —

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство

$$L\to: \frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta\rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi\rangle}$$

($\Rightarrow$) Пусть верхняя таблица выполнима —
покажем, что тогда выполнима хотя бы одна из нижних таблиц

По определению выполнимости таблицы,
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- для любой формулы χ' из Γ верно $\mathcal{I} \models \chi'[\widetilde{d}^n]$
- для любой формулы χ'' из Δ верно $\mathcal{I} \not\models \chi''[\widetilde{d}^n]$
- $\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d}^n]$

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$:

$$L\&, R\&, L\lor, R\lor, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$$ —

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство

$(L\rightarrow\ (\Rightarrow))\qquad \chi' \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \chi'[\widetilde{d^n}] \qquad \chi'' \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \chi''[\widetilde{d^n}] \qquad \mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\widetilde{d^n}])$

Так как $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\widetilde{d^n}]$, то, согласно семантике $\rightarrow$, верно хотя бы одно из двух:

- $\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d^n}]$
- $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d^n}]$

Следовательно, хотя бы одна из таблиц $\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle$, $\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle$ выполнима

$(\Leftarrow)$ Рассуждения аналогичны

$L\&$, $R\&$, $L\lor$, $R\lor$, $R\rightarrow$, $L\neg$, $R\neg$ — рассуждения аналогичны

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\ T_2)}$:

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\!\to,\ R\!\to,\ L\neg,\ R\neg,\ L\forall,\ R\forall,\ L\exists,\ R\exists\ —$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\forall$: $\frac{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\, \varphi \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma, \forall \mathrm{x}\, \varphi, \varphi\{\mathrm{x}/t\} \mid \Delta\rangle}$

($\Leftarrow$) *Очевидно, что* если вычеркнуть «$\varphi\{\mathrm{x}/t\}$» из выполнимой (нижней) таблицы, то она (станет верхней и) останется выполнимой

($\Rightarrow$) Пусть верхняя таблица выполнима,

и пусть $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — все свободные переменные формул нижней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$

существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}\, \varphi)[\widetilde{d}^n]$

При этом $\quad \mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}\, \varphi)[\widetilde{d}^n] \quad\Rightarrow\quad \mathcal{I} \models \varphi[t[\widetilde{d}^n], \widetilde{d}^n] \quad\Rightarrow\quad \mathcal{I} \models \varphi\{\mathrm{x}/t\}[\widetilde{d}^n]$

Значит, нижняя таблица также выполнима

А где используется **правильность** подстановки $\{\mathrm{x}/t\}$ для φ?

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\ T_2)}$:

$L\&$, $R\&$, $L\vee$, $R\vee$, $L\to$, $R\to$, $L\neg$, $R\neg$, $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$ —

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,

когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. *$L\exists$:* $\frac{\langle \Gamma, \exists \mathrm{x}\ \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta \rangle}$

($\Leftarrow$) *Очевидно*, т.к. если $\mathcal{I} \models \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}[\widetilde{d}^n]$, то $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$

($\Rightarrow$) Пусть верхняя таблица выполнима,
и $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$ — а значит, существует предмет d_0,
  такой что $\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Лемма (о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(,\ T_2)}$:

$L\&$, $R\&$, $L\vee$, $R\vee$, $L\to$, $R\to$, $L\neg$, $R\neg$, $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$ —

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство. $L\exists$: $\frac{\langle \Gamma, \exists \mathtt{x}\, \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta \rangle}$

$(\Rightarrow)$ $\quad \psi \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d^n}] \quad \chi \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \psi[\widetilde{d^n}] \quad \mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d^n}]$

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{J}$,
отличающуюся от $\mathcal{I}$ только оценкой константы $\mathbf{c}$: $\bar{\mathbf{c}} = d_0$

Тогда $\mathcal{J} \models (\varphi\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\})[\widetilde{d^n}]$

Кроме того,

- $\mathcal{J} \models \psi[\widetilde{d^n}]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{J} \not\models \chi[\widetilde{d^n}]$ для каждой формулы χ из Δ

Значит, нижняя таблица выполнима

А где используется тот факт, что **c** — «новая» константа?

$R\forall$, $R\exists$ — рассуждения аналогичны ▼

Теорема (о корректности табличного вывода)
Если для семантической таблицы T существует успешный табличный вывод, то таблица T невыполнима

Доказательство.
Следует из определения успешного табличного вывода, утверждения о невыполнимости закрытых таблиц и леммы о корректности правил табличного вывода ▼

Следствие
Если для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод, то $\models \varphi$

А верно ли утверждение в обратную сторону?