

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 11

Метод семантических таблиц
в логике предикатов:
табличный вывод

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

Правила табличного вывода

$$L\&: \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\&: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\vee: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\rightarrow: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg: \frac{\langle \Gamma, \neg \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\neg: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg \varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

Здесь и далее:

- ▶ φ и ψ — формулы (логики предикатов)
- ▶ Γ, Δ — множества формул

Эти восемь правил устроены точно так же, как и для логики высказываний, и имеют точно такой же смысл

Правила табличного вывода

$$L\forall: \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi, \varphi\{x/t\} \mid \Delta \rangle}$$

$$R\forall: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \forall x \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi\{x/c\} \rangle}$$

$$L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi\{x/c\} \mid \Delta \rangle}$$

$$R\exists: \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi, \varphi\{x/t\} \rangle}$$

Здесь:

- ▶ x — предметная переменная
- ▶ t — терм, такой что подстановка $\{x/t\}$ **правильна** для φ
- ▶ c — константа, **не содержащаяся** в φ и в формулах из $\Gamma \cup \Delta$

Правила табличного вывода

Пара слов об ограничениях для правил $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$

Если разрешить подставлять любые термы в $L\forall$, $R\exists$:

$$\frac{\langle \forall x \exists y P(x, y) \mid \exists y P(y, y) \rangle}{\langle \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(y, y) \mid \exists y P(y, y) \rangle} \begin{array}{l} \text{— выполняемая таблица} \\ \text{— невыполнимая таблица} \end{array}$$

Если разрешить подставлять «использованные» константы в $L\exists$, $R\forall$:

$$\frac{\langle \exists x P(x) \mid P(c) \rangle}{\langle P(c) \mid P(c) \rangle} \begin{array}{l} \text{— выполняемая таблица} \\ \text{— невыполнимая таблица} \end{array}$$

Табличный вывод

Табличный вывод — это корневое дерево, размеченное семантическими таблицами, построенное по правилам вывода и по каждой конечной ветви завершающееся закрытой или атомарной таблицей

(дословно переносится из логики высказываний)

Успешный табличный вывод (**табличное опровержение**) — это **конечный** вывод, все листья которого помечены **закрытыми** таблицами

Определения, относящиеся к семантическим таблицам **логики высказываний**, удалось почти без изменений адаптировать к логике предикатов

К сожалению, с утверждениями об устройстве табличных выводов так поступить не выйдет — чтобы это понять, достаточно увидеть на примере, насколько сложнее устроены табличные выводы в логике предикатов по сравнению с логикой высказываний

Примеры табличных выводов

$$\langle \mid \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)) \rangle$$

$\downarrow R \rightarrow$

$$\langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \rangle$$

$\downarrow R \rightarrow$

$$\langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x A(x) \mid \forall x B(x) \rangle$$

$\downarrow R \forall$

$$\langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x A(x) \mid B(c) \rangle$$

$\downarrow L \forall$

$$\langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x A(x), A(c) \mid B(c) \rangle$$

$\downarrow L \forall$

$$\langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x A(x), A(c) \rightarrow B(c), A(c) \mid B(c) \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ \langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), & L \rightarrow & \langle \forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \\ \forall x A(x), B(c), A(c) \mid B(c) \rangle & & \forall x A(x), A(c) \mid B(c), A(c) \rangle \end{array}$$

Закрытая таблица

Закрытая таблица

Вывод успешен

При этом $\models \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$

Примеры табличных выводов

$$\begin{aligned} & \langle \mid \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x) \rangle \\ & \quad \downarrow R \rightarrow \\ & \langle \exists x P(x) \mid \forall x P(x) \rangle \\ & \quad \downarrow L \exists \\ & \langle P(c_1) \mid \forall x P(x) \rangle \\ & \quad \downarrow R \forall \\ & \langle P(c_1) \mid P(c_2) \rangle \end{aligned}$$

Незакрытая атомарная таблица

Вывод **неуспешен**

При этом $\not\models \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

Примеры табличных выводов

$$\begin{array}{c} \langle \mid \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y) \rangle \\ \downarrow R \rightarrow \\ \langle \forall x \exists y P(x, y) \mid \exists y \forall x P(x, y) \rangle \\ \downarrow L \forall \\ \langle \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(c_1, y) \mid \exists y \forall x P(x, y) \rangle \\ \downarrow R \exists \\ \langle \forall x \exists y P(x, y), \exists y P(c_1, y) \mid \exists y \forall x P(x, y), \forall x P(x, c_2) \rangle \\ \downarrow L \exists \\ \langle \forall x \exists y P(x, y), P(c_1, c_3) \mid \exists y \forall x P(x, y), \forall x P(x, c_2) \rangle \\ \downarrow R \forall \\ \langle \forall x \exists y P(x, y), P(c_1, c_3) \mid \exists y \forall x P(x, y), P(c_4, c_2) \rangle \\ \downarrow L \forall \\ \infty \end{array}$$

Вывод **бесконечен**

При этом $\not\models \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$

Примеры табличных выводов

$$\begin{array}{c} \langle \mid \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y) \rangle \\ \downarrow R \rightarrow \\ \langle \exists x \forall y P(x, y) \mid \forall y \exists x P(x, y) \rangle \\ \downarrow L \exists \\ \langle \forall y P(c_1, y) \mid \forall y \exists x P(x, y) \rangle \\ \downarrow R \forall \\ \langle \forall y P(c_1, y) \mid \exists x P(x, c_2) \rangle \\ \downarrow L \forall \\ \langle \forall y P(c_1, y), P(c_1, c_3) \mid \exists x P(x, c_2) \rangle \\ \downarrow R \exists \\ \langle \forall y P(c_1, y), P(c_1, c_3) \mid \exists x P(x, c_2), P(c_4, c_2) \rangle \\ \downarrow L \forall \\ \infty \end{array}$$

Вывод **бесконечен**

При этом $\models \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$